MEDIAN

La qualité et la précision de la rédaction sera prise en compte pour l'attribution de la note. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 Pour s'échauffer (6 points)

Les deux questions sont indépendantes :

1. Soit le problème différentiel

$$\begin{cases} y' &= y^2+1 \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

a. Donner une approximation de $y(0,5)$ par la méthode d'Euler en prenant comme pas $h = 0,1$.

b. Résoudre de manière exacte le problème.

c. Comparer la valeur obtenue à la question **a** à la valeur théorique.

2. Soit $f(x) = \dfrac{1}{x^2(x+3)}$

a. Décomposer en éléments simples $f(x)$

b. En déduire une primitive de f.

c. Que pouvez-vous dire de $\int_0^1 f(x)$? Peut-on retrouver ce résultat sans calcul ?

Exercice 2 Méthode des rectangles (6 points)

Dans cet exercice on étudie l'erreur commise lorsqu'on calcule une valeur approchée de $\int_a^b f(x)dx$ par la méthode des rectangles. Dans tout l'exercice f désigne une fonction positive *croissante* définie sur $[a,b]$. On introduit les sommes suivantes

$$S_n(f) = \frac{(b-a)}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\times\frac{(b-a)}{n}) \quad \text{et} \quad S'_n(f) = \frac{(b-a)}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+k\times\frac{(b-a)}{n}).$$

1. À l'aide d'un dessin interpéter géométriquement $S_n(f)$ et $S'_n(f)$. En déduire

$$S_n(f) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant S'_n(f)$$

2. Calculer en fonction de $f(a), f(b)$ et $\dfrac{b-a}{n}$ la différence $S'_n(f) - S_n(f)$.

3. On rappelle l'inégalité des accroissements finis (MT19) : *soit f une fonction continue sur $[a,b]$ dérivable sur $]a,b[$ et telle que $|f'(x)| \leqslant M$ pour tout $x \in]a,b[$ alors $|f(b)-f(a)| \leqslant (b-a)M$.*

Montrer que $\int_a^b f(x)dx - S_n(f) \leqslant M\dfrac{(b-a)^2}{n}$.

4. Application : on souhaite calculer une valeur approchée de $\int_0^1 f(x)dx$ où $f(x) = e^{x^2}$. En combien d'intervalles n faut-il diviser $[0,1]$ pour que S_n donne une approximation de $\int_0^1 f(x)dx$ correcte à 10^{-2} près ?

TOURNER LA PAGE SVP

Exercice 3 Équation de Cauchy-Euler (10 points)

Le but de ce problème est de la résolution d'équation du type

$$x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0 \quad (E) \quad \text{avec } \alpha, \beta \text{ réels}$$

On supposera dans tout le problème que $x \in]0, +\infty[$, ainsi les fonctions y, solutions de (E), seront définies sur des intervalles $I \subset]0, +\infty[$. L'équation (E) est appelée équation de Cauchy-Euler.

1. Première approche :

a. Soit m un réel positif, montrer que $y = x^m$ est une solution si et seulement si

$$m^2 + (\alpha - 1)m + \beta = 0$$

b. Dans le cas où $(\alpha - 1)^2 - 4\beta > 0$, donner deux solutions y_1 et y_2 de (E).

c. En montrant que cette équation satisfait au principe de superposition, prouver que $y = C_1y_1 + C_2y_2$, avec C_1 et C_2 deux constantes réelles, est encore une solution.

d. Déterminer une solution de $x^2y'' + 6xy' + 4y = 0$ telle que $y(1) = 1$ et $y'(1) = 0$.

2. Cas général :

a. On considère le changement de variables $x = e^u$, et on note g la fonction définie par $g(u) = y(e^u)$. Calculer $g'(u)$ et $g''(u)$.

b. On note (E_1) l'équation différentielle $g''(u) + (\alpha - 1)g'(u) + \beta g(u) = 0 \quad (E_1)$. Montrer que $(E_1) \Leftrightarrow (E)$.

c. Résoudre (E_1).

d. Dans le cas où $(\alpha - 1)^2 - 4\beta > 0$ retrouver les solutions de (E) de la première partie (on remarquera que $y(x) = g(\ln(x))$).

e. Déterminer les solutions de (E) dans les autres cas.

f. Résoudre alors l'équation $x^2y'' + xy' + y = 0$ avec les conditions initiales $y(1) = 1$ et $y'(1) = 0$.