le 2 Février 2011

UTBM MT20

Médian automne 2010

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est **une feuille A4 recto-verso rédigée à la main**

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

Exercice 1 - *6 points*

1. *En utilisant un changement de variables, donner une primitive de* $\frac{1}{e^x+e^{-x}}$.
2. *Calculer l'intégrale* $I = \int_1^2 \frac{x^2-x+1}{x^3+x}\mathrm{d}x$.
3. *Soit, pour* $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_1^e (\ln(x))^n dx$.
   a) Déterminer, pour $n \geq 1$, *une relation de récurrence entre* I_n *et* I_{n-1}.
   b) En déduire I_3 *et* I_4.

Exercice 2 - *8 points*

1. *Les intégrales généralisées suivantes sont-elles convergentes ? Discuter suivant les valeurs de* n.

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t^n}\mathrm{d}t \ (n \in \mathbb{N}) \quad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^n}\mathrm{d}t \ (n \in \mathbb{N}).$$

2. *Les intégrales généralisées suivantes sont-elles convergentes ? Justifier.*

$$I_3 = \int_0^{+\infty} sin(e^t)\mathrm{d}t, \ I_4 = \int_0^{+\infty} sin(\frac{1}{t})\mathrm{d}t.$$

TOURNER LA PAGE SVP

Exercice 3 - *6 points*

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ *telle que*

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt.$$

1) Montrer que f *est dérivable sur son ensemble de définition.*

2) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, ln(2).e^x \leq f(x) \leq ln(2).e^{2.x}$ *et* $\forall x \in \mathbb{R}_-, ln(2).e^x \geq f(x) \geq ln(2).e^{2.x}$.

3) prolonger f *par continuité.*

RAPPEL :

$$\ln(1+X) \sim_{X\to 0} X - \frac{X^2}{2} + o(X^2).$$

$$\cos(X) \sim_{X\to 0} 1 - \frac{X^2}{2} + o(X^3).$$

$$\sin(X) \sim_{X\to 0} X - \frac{X^3}{6} + o(X^3).$$

$$\arctan(X) = X - \frac{1}{3}X^3 + o(X^3).$$

$$\forall k \in]-1,1[, \sum_{n=N}^{+\infty} k^n = \frac{k^N}{1-k}.$$