le 24 Janvier 2012

UTBM MT20

Médian automne 2011

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est **une feuille A4 recto-verso rédigée à la main**

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

Exercice 1 - *8 points*

1. *Calculer l'intégrale*
$$I = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x + e^{-x}} dx.$$
2. *Calculer les primitives* $\int \frac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt[3]{2+x}} dx$ *à l'aide du changement de variable* $t = \sqrt[3]{2+x}$.
3. *Calculer les primitives de* $f(x) = \frac{1}{x^2+5}$.
4. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on pose*
$$I_n = \int_0^1 x^n.e^x dx \text{ et } J_n = \int_1^e (\ln(x))^n dx.$$
   (a) *Etablir une récurrence entre* I_n *et* I_{n-1}. *En déduire le calcul de* I_n.
   (b) *Montrer que* $J_n = I_n$.

Exercice 2 - *8 points*

1. *Les intégrales généralisées suivantes sont-elles convergentes ? Discuter suivant la valeur de* n.
$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x.(x^2-1)} \mathrm{d}x, \quad I_2 = \int_0^1 (\ln(x))^n \mathrm{d}x \ (n \in \mathbb{N})$$
2. *Les intégrales généralisées suivantes sont-elles convergentes ? Justifier.*
$$I_3 = \int_0^{+\infty} x e^{-x} \sin(x) \mathrm{d}x, \quad I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x.\sqrt{x}} \mathrm{d}x.$$

TOURNER LA PAGE SVP

Exercice 3 - *6 points*

Les trois premières questions sont indépendantes. Si une question pose problème, passer a la suivante.

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^4 + t^2 + 4}}.$$

1) Montrer que F est une fonction impaire.

2) Montrer que F est dérivable et calculer sa dérivée F'. Quel est le signe de F' sur $\mathbb{R}$?

3) Montrer que pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a $0 \leq F(x) \leq \frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+4}}$.

4) Déduire de ce qui précède que F est bornée sur $\mathbb{R}$ et donner un majorant de $|F|$.

RAPPEL :

$$\ln(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + o(X^2).$$

$$\cos(X) = 1 - \frac{X^2}{2} + o(X^3).$$

$$\sin(X) = X - \frac{X^3}{6} + o(X^3).$$

$$\arctan(X) = X - \frac{1}{3}X^3 + o(X^3).$$

$$\forall k \in]-1, 1[, \sum_{n=N}^{+\infty} k^n = \frac{k^N}{1-k}.$$