Exercice 1

1. La fonction F définie sur $]0\,;+\infty[$ par $F(x)=\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$ est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$. VRAI.

   La fonction F est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $\forall\, x>0,\ F'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}>0.$

2. Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et **impaire**, alors pour tout nombre réel a, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$. FAUX.

   Sous ces hypothèses, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x=0.$

3. Si f est une fonction continue sur un segment $[a\,;b]$ avec $a\leqslant b$.
   Alors $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$. VRAI (résultat du cours).

4. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{3^t}\,\mathrm{d}t$ est convergente. VRAI.

   $\forall\, t\in[0\,,+\infty[,\ 0<\dfrac{1}{3^t}\leqslant\dfrac{1}{\mathrm{e}^t}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

5. Si f est une fonction continue sur $[0\,,+\infty[$ et si $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x)=0$ alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. FAUX.

   Il suffit de considérer la fonction $f : t\longmapsto \dfrac{1}{1+t}$

6. La série de terme général $\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$ est convergente. FAUX.

   $\displaystyle\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k+1}{k}=\sum_{k=1}^{n}[\ln(k+1)-\ln(k)]=\sum_{j=2}^{n+1}\ln j-\sum_{j=2}^{n}\ln j$
   $=\ln(n+1)\underset{(n\to+\infty)}{\longrightarrow}+\infty.$

7. Pour que la série réelle $\sum u_n$ converge, **il faut que** la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro. VRAI (résultat du cours).

8. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle **positive**.
   Si la suite des sommes partielles $\displaystyle\left(\sum_{k=0}^{n}a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors la série $\sum a_n$ converge. VRAI (résultat du cours).

Exercice 2

1. La suite S de terme général la somme de Riemann
   $\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(k/n)^2}$ est convergente, de limite égale à $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=[\arctan x]_0^1=\frac{\pi}{4}$

2. En intégrant par parties, $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t\,\ln t\,\mathrm{d}t=\left[\frac{t^2}{2}\,\ln t\right]_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}\frac{t^2}{2}\,\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=\frac{1+\mathrm{e}^2}{4}$

3. Soit $x\in\mathbb{R}$. En effectuant le changement de variable $u=\cos t$ dans l'intégrale $\displaystyle I(x)=\int_1^x\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$, on obtient $\displaystyle I(x)=\int_{\cos 1}^{\cos x}\frac{-\mathrm{d}u}{1+u^2}=\int_{\cos x}^{\cos 1}\frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$

4. La série de terme général $\dfrac{n}{3^n}$ est, à un facteur près, la série dérivée de la série géométrique de raison $1/3$, elle est donc convergente et
   $$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{3^k}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{+\infty}k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}=\frac{1}{3}\,\frac{1}{(1-(1/3))^2}=\frac{3}{4}$$

5. Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge lorsque $\alpha>1$.

   En effet, la fonction $f : t\longmapsto\dfrac{\ln(t)}{t^\alpha}$ est continue sur $[1\,,+\infty[$. Le problème se pose donc en $+\infty$. Soit β un réel tel que $1<\beta<\alpha$.

   Puisque $\alpha-\beta>0$, $\quad\forall\, t\geqslant 1,\ t^\beta f(t)=\dfrac{\ln t}{t^{\alpha-\beta}}\underset{(t\to+\infty)}{\longrightarrow}0$ par croissance comparée.

   Donc $\exists\, A\geqslant 1\ /\ \forall\, t\in\mathbb{R},\ \left(t\geqslant A\Longrightarrow t^\beta f(t)\leqslant 1\Longrightarrow 0\leqslant f(t)\leqslant\dfrac{1}{t^\beta}\right)$

   Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_A^{+\infty}\frac{1}{t^\beta}\,\mathrm{d}t$ converge car $\beta>1$.

   Donc, par comparaison, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_A^{+\infty}\frac{\ln(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge aussi.

Exercice 3

1. Soit α un réel strictement positif.
La fonction $f : t \longmapsto \dfrac{1}{t^\alpha(1+t)}$ est continue et positive sur $[1\,,+\infty[$.
Le problème se pose donc en $+\infty$ seulement.

$$f(t) \underset{(t\to+\infty)}{\sim} \frac{1}{t^\alpha\, t} = \frac{1}{t^{\alpha+1}}$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\alpha+1>1$ c'est-à-dire $\alpha>0$.

Donc l'intégrale généralisée $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha(1+t)}\,\mathrm{d}t \text{ est convergente ssi } \alpha>0}$

2. (a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$, n fixé.

$$\begin{aligned}
u_n+u_{n+1} &= \int_1^{+\infty}\frac{1}{t^n(1+t)}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{n+1}(1+t)}\,\mathrm{d}t\\
&= \int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t^n(1+t)}+\frac{1}{t^{n+1}(1+t)}\right)\mathrm{d}t \qquad \text{par linéarité}\\
&= \int_1^{+\infty}\left(\frac{t+1}{t^{n+1}(1+t)}\right)\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{n+1}}\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{1}{t^{n+1}}\,\mathrm{d}t\\
&= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-1}{n\,t^n}\right]_1^x = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{n\,x^n}+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\boxed{u_n+u_{n+1}=\dfrac{1}{n}}$

(b) Soit x un réel supérieur à 1.

$$\begin{aligned}
\int_1^x \frac{1}{t(1+t)}\,\mathrm{d}t &= \int_1^x\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = [\ln t-\ln(1+t)]_1^x\\
&= \left[-\ln\left(\frac{t+1}{t}\right)\right]_1^x = \left[-\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right]_1^x\\
&= -\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\ln 2 \underset{(x\to+\infty)}{\longrightarrow} \ln 2\,.
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{u_1=\ln 2}$

(c) En utilisant 2.(a) avec $n=1$ puis $n=2$, on obtient :
- $u_1+u_2=1$ d'où $u_2=1-\ln 2$.
- $u_2+u_3=1/2$ d'où $u_3=1/2-(1-\ln 2)=\ln(2)-1/2$.

3. (a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Par linéarité,

$$u_n-u_{n+1} = \int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t^n(1+t)}-\frac{1}{t^{n+1}(1+t)}\right)\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty}\left(\frac{t-1}{t^{n+1}(1+t)}\right)\mathrm{d}t$$

Or la fonction $t\longmapsto \dfrac{t-1}{t^{n+1}(1+t)}$ est continue, intégrable et **positive** sur l'intervalle $[1\,,+\infty[$.

Par conséquent $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\frac{t-1}{t^{n+1}(1+t)}\right)\mathrm{d}t \geqslant 0$ ce qui revient à dire que $u_n\geqslant u_{n+1}$.

La suite (u_n) est donc décroissante.

(b) Soit n un entier, $n\geqslant 2$. Puisque la suite (u_n) est décroissante,

$$u_{n+1}\leqslant u_n\leqslant u_{n-1} \quad \text{d'où} \quad u_n+u_{n+1}\leqslant 2u_n\leqslant u_{n-1}+u_n$$

Or, d'après l'égalité obtenue en 2.(a), $u_n+u_{n+1}=\dfrac{1}{n}$ et $u_{n-1}+u_n=\dfrac{1}{n-1}$.

On en déduit que : $$\frac{1}{n}\leqslant 2\,u_n\leqslant\frac{1}{n-1}$$

(c) Pour tout entier $n\geqslant 2$, $1\leqslant 2\,n\,u_n\leqslant\dfrac{n}{n-1}$

Or $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{n}{n-1}=\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{n}{n}=1$.

Donc, d'après le théorème «des gendarmes», $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}2\,n\,u_n=1$

ce qui revient à dire que

$$\boxed{u_n\underset{(n\to+\infty)}{\sim}\frac{1}{2\,n}}$$

4. La série $\sum u_n$ est à termes réels positifs avec $u_n\underset{(n\to+\infty)}{\sim}\dfrac{1}{2\,n}$

On sait de plus que la série de Riemann $\sum\dfrac{1}{n}$ diverge.

Donc la série $\sum\dfrac{1}{2n}$ diverge aussi

et finalement la série $\boxed{\sum u_n \text{ est divergente}}$.