TRONC COMMUN

MT20

MÉDIAN - AUTOMNE 2012

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 2 HEURES

Une feuille de notes manuscrites est le seul document autorisé.
L'utilisation d'une calculatrice ou d'un téléphone est donc interdite.

Exercice 1 (4 points)

Vous indiquerez pour chacune des huit affirmations suivantes si elle est Vraie ou Fausse, sans justification. Chaque réponse juste rapporte 0,5 point et chaque réponse fausse enlève 0,5 point.

1. La fonction F définie sur $]0\,;+\infty[$ par $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$ est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

2. Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et impaire, alors pour tout nombre réel a,
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

3. Si f est une fonction continue sur un segment $[a\,;b]$ avec $a \leqslant b$. Alors :
$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$$

4. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{3^t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

5. Si f est une fonction continue sur $[0\,,+\infty[$ et si $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = 0$ alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

6. La série de terme général $\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$ est convergente.

7. Pour que la série réelle $\sum u_n$ converge, il faut que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro.

8. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive.

   Si la suite des sommes partielles $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors la série $\sum a_n$ converge.

Exercice 2 (5 points)

Pour chacune des cinq questions suivantes, une seule des quatre propositions est exacte. On demande d'indiquer laquelle sans justification. Chaque réponse juste rapporte 1 point, chaque réponse fausse enlève 0,5 point. Vous pouvez décider de ne pas répondre à certaines questions. Ces questions ne rapportent aucun point et n'en enlèvent aucun. Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à zéro.

1. Soit x un nombre réel. En effectuant le changement de variable $u = \cos t$ dans l'intégrale $I(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$, on montre que $I(x)$ est égale à :

   (a) $\displaystyle\int_1^x \frac{-1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$ (b) $\displaystyle\int_{\arccos 1}^{\arccos x} \frac{-1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$ (c) $\displaystyle\int_{\cos x}^{\cos 1} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$ (d) $\displaystyle\int_{\cos 1}^{\cos x} \frac{-u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$

2. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x \ln x\,\mathrm{d}x$ est égale à :

   (a) $\dfrac{1+\mathrm{e}^2}{4}$ (b) $\dfrac{1-\mathrm{e}^2}{4}$ (c) $\dfrac{\mathrm{e}^2-1}{4}$ (d) $\dfrac{\mathrm{e}^2-2\mathrm{e}+2}{4}$

3. La suite S de terme général $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$ est convergente, de limite égale à :

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ (d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge lorsque

   (a) $\alpha < 0$ (b) $\alpha > 1$ (c) $\alpha = 1$ (d) $0 < \alpha < 1$

5. La série de terme général $\dfrac{n+1}{3^n}$ est convergente et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{3^k} = \ldots$

   (a) e^{-3} (b) $\dfrac{3}{2}$ (c) $\dfrac{9}{4}$ (d) $\dfrac{13}{4}$

Exercice 3 (11 points)

Cet exercice sera rendu sur une feuille séparée. La qualité de la rédaction et la présentation entreront pour une part importante dans la notation.

1. Soit α un réel strictement positif.
   Pour quelles valeurs de α, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha(1+t)}\,\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?

2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n(1+t)}\,\mathrm{d}t$$
   (a) Prouver que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n + u_{n+1} = \frac{1}{n}$$
   (b) Calculer u_1 en remarquant que pour tout réel $t \geqslant 1$, $\quad \dfrac{1}{t(1+t)} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{1+t}$

   (c) En déduire u_2 et u_3.

3. (a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

   (b) Établir que pour tout entier $n \geqslant 2$,
$$\frac{1}{n} \leqslant 2\,u_n \leqslant \frac{1}{n-1}$$
   (c) En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4. La série $\sum u_n$ est-elle convergente ? Pourquoi ?