

# Médian automne 2013

*Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est une feuille A4 recto-verso rédigée à la main*

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

## Exercice 1 - 6 points

Calculer les primitives des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

1.  $f_1(t) = \frac{\tan(t)}{\cos(t)}$ ,
2.  $f_2(t) = (2.t + 1) \cdot \sin(t)$ ,
3.  $f_3(t) = \frac{t^3+1}{t^2+1}$ ,
4.  $f_4(t) = \frac{e^{2.t}}{e^t+1}$ .

## Exercice 2 - 5 points

Si une question pose problème, passer à la suivante.

On se propose, dans cet exercice, de trouver une approximation à  $10^{-4}$  près de

$$I = \int_1^3 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dt.$$

1) Comment se comporte la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$  sur  $[1, 3]$  ?

2) Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{n} \cdot \frac{\ln(1 + \frac{2k}{n})}{\sqrt{1 + \frac{2k}{n}}} \leq I \leq \sum_{k=1}^n \frac{2}{n} \cdot \frac{\ln(1 + \frac{2k}{n})}{\sqrt{1 + \frac{2k}{n}}}.$$

3) Pour quel  $n$  a-t-on  $\sum_{k=1}^n \frac{2}{n} \cdot \frac{\ln(1 + \frac{2k}{n})}{\sqrt{1 + \frac{2k}{n}}}$  qui est une approximation à  $10^{-4}$  près de  $I$  ?

TOURNER LA PAGE SVP

**Exercice 3** - 7 points

1. Calculer les intégrales généralisées suivantes si elles convergent ?

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan(x)} dx, \quad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

2. L'intégrale généralisée suivante est-elle convergente ? Justifier soigneusement.

$$I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x} \cdot (x^2 + 1)} dx$$

**Exercice 4** - 6 points

Soit les fonction  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définies par  $f_n(t) = \ln(t)^n$  où  $n \in \mathbb{Z}$ .

1. Discuter suivant la valeur de  $n \in \mathbb{Z}$ , l'intégrabilité de  $f_n$  en 0. Justifier.
2. Discuter suivant la valeur de  $n \in \mathbb{Z}$ , l'intégrabilité de  $f_n$  en  $+\infty$ . Justifier.
3. Discuter suivant la valeur de  $n \in \mathbb{Z}$ , l'intégrabilité de  $f_n$  en 1. Justifier.

**RAPPEL :**

$$\ln(1 + X) = X - \frac{X^2}{2} + o(X^2).$$

$$\cos(X) = 1 - \frac{X^2}{2} + o(X^3).$$

$$\sin(X) = X - \frac{X^3}{6} + o(X^3).$$

$$\arctan(X) = X - \frac{1}{3}X^3 + o(X^3).$$

$$\forall k \in ]-1, 1[, \sum_{n=N}^{+\infty} k^n = \frac{k^N}{1-k}.$$

$$\ln(2) \simeq 0.6931471806, \quad \ln(3) \simeq 1.098612289.$$

$$\sqrt{3} \simeq 1.732050808, \quad \frac{\ln(3)}{\sqrt{3}} \simeq 0.6342841009.$$