

Médian automne 2014

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est une feuille A4 recto-verso rédigée à la main

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

Exercice 1 - 6 points

Donner les primitives de

1. $f(x) = x \cdot \ln(x)$ sur \mathbb{R}_+^* .
2. $f(x) = \frac{\cos^2 x}{\tan x}$ sur $]-\frac{\pi}{2}, 0[$.
3. $f(x) = \frac{x+3}{x^2+4x+5}$ sur \mathbb{R} .

Exercice 2 - 4 points

Calculer l'intégrale

$$\int_{-1}^6 \frac{1}{\sqrt{2+x} + \sqrt[3]{2+x}} dx$$

à l'aide du changement de variable $t = \sqrt[3]{2+x}$.

Exercice 3 - 6 points

Attention au signe de la fonction à intégrer !

1. $I_1 = \int_2^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x \cdot \sqrt{x}} dx$ est-elle convergente ?
2. $I_2 = \int_0^2 \frac{\sin(x)}{x \cdot \sqrt{x}} dx$ est-elle convergente ?
3. Grâce au changement de variables $u = x^2$, montrer que $I_3 = \int_1^{+\infty} \sin(x^2) dx$ est convergente.

TOURNER LA PAGE SVP

Exercice 4 - 5 points

Etudier l'intégrabilité de $t \mapsto f_n(t) = \ln(t)^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$ en $0, +\infty$ et 1 suivant les cas.

RAPPEL :

$$\ln(1 + X) = X - \frac{X^2}{2} + o(X^2).$$

$$\cos(X) = 1 - \frac{X^2}{2} + o(X^3).$$

$$\sin(X) = X - \frac{X^3}{6} + o(X^3).$$

$$\arctan(X) = X - \frac{1}{3}X^3 + o(X^3).$$

$$\forall k \in]-1, 1[, \sum_{n=N}^{+\infty} k^n = \frac{k^N}{1-k}.$$