le 22 Janvier 2016

UTBM MT20

Médian automne 2015

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est **une feuille A4 recto-verso rédigée à la main**

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

Exercice 1 - *6 points*

Calculer les primitives des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

1. $f_1(t) = \cos^3(t)$,
2. $f_2(t) = t^2 . \cos(t)$,
3. $f_3(t) = \frac{t+2}{t^2+2t+2}$,
4. $f_4(t) = \frac{e^t}{e^t+1}$.

Exercice 2 - *8 points*

Si une question pose problème, passer à la suivante.

I - Série harmonique.

1) Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x \leq \frac{1}{k}.$$

2) Déduire de la question précédente que la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *avec* $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ *est une suite divergente vers* $+\infty$.

II - Généralisation.

Soit $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ *continue, décroissante et convergeant vers* 0 *lorsque* x *tend vers* $+\infty$.

1) Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) \mathrm{d}x \leq f(k).$$

2) En déduire que $\int_1^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x$ *converge si et seulement si la suite* $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *avec* $s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$ *converge.*

Ce résultat s'appelle le "critère de comparaison d'une série avec une intégrale".

TOURNER LA PAGE SVP

Exercice 3 - *6 points*

1. **Calculer** *les intégrales généralisées suivantes si elles convergent ?*

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{\ln(x)}\mathrm{d}x, \quad I_2 = \int_0^{\infty} \frac{t+1}{e^t}\mathrm{d}t.$$

2. *L'intégrale généralisée suivante est-elle convergente ? Justifier soigneusement.*

$$I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}.(x^3+2x+4)}\mathrm{d}x$$

RAPPEL :

$$\ln(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + o(X^2).$$

$$\cos(X) = 1 - \frac{X^2}{2} + o(X^3).$$

$$\sin(X) = X - \frac{X^3}{6} + o(X^3).$$

$$\arctan(X) = X - \frac{1}{3}X^3 + o(X^3).$$

$$\forall k \in]-1,1[, \sum_{n=N}^{+\infty} k^n = \frac{k^N}{1-k}.$$

$$\ln(2) \simeq 0.6931471806, \ \ln(3) \simeq 1.098612289.$$

$$\sqrt{3} \simeq 1.732050808, \ \frac{\ln(3)}{\sqrt{3}} \simeq 0.6342841009.$$