EXAMEN FINAL

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'attribution de la note. Le barème est donné à titre indicatif. Les calculatrices sont interdites. Une feuille A4 est autorisée.

Exercice 1

Soit la courbe paramétrée Γ *définie par*

$$\begin{cases} x &= 3t^2 - 2t^3 \\ y &= 5t^4 - 4t^5 \end{cases}$$

1. *Trouver les points singuliers de* Γ.

2. *Déterminer la nature de ces points singuliers.*

[3 points]

Exercice 2

Soit la courbe paramétrée Λ *définie par*

$$\begin{cases} x &= R(2\cos(\theta) - \cos(2\theta)) \\ y &= R(2\sin(\theta) - \sin(2\theta)) \end{cases}$$

1. *Faire l'étude complète de la courbe et la tracer pour* $R = 2$ *(pour tracer* Γ *vous pouvez prendre comme approximation* $\sqrt{3} \simeq 1,7$*).*

2. *On considère* Δ *le domaine délimité par la courbe* Λ.

a. *Déduire des équations paramétriques de* Λ *une paramétrisation du domaine* Δ *en coordonnées* (R, θ).

b. *À l'aide d'un changement de variables calculer l'aire de* Δ. *[indication pour le calcul du jacobien vous pouvez utliser* $\cos(\theta) = \cos(\theta)\cos(2\theta) + \sin(\theta)\sin(2\theta)$*]*

[10 points]

Rappels :

$$\begin{aligned} \cos(p) + \cos(q) &= 2\cos(\tfrac{p+q}{2})\cos(\tfrac{p-q}{2}) \\ \cos(p) - \cos(q) &= -2\sin(\tfrac{p+q}{2})\sin(\tfrac{p-q}{2}) \\ \sin(p) + \sin(q) &= 2\sin(\tfrac{p+q}{2})\cos(\tfrac{p-q}{2}) \\ \sin(p) - \sin(q) &= 2\cos(\tfrac{p+q}{2})\sin(\tfrac{p-q}{2}) \end{aligned}$$

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos(x)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\sin(x)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

Exercice 3

1. *Donner l'expression du changement de coordonnées sphériques* Φ *et calculer son Jacobien.*

2. *Calculer* $\iiint_V z e^{(x^2+y^2+z^2)^2} dxdydz$ *où* $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1, z \geqslant 0\}$

[4 points]

Exercice 4

[voilà l'été]

Le but de ce problème est de calculer le centre de garvité d'une glace afin de vous permettre d'éviter les accidents de glace cet été sur la plage. On modélise notre étude de la façon suivante : on considère une glace (cornet + boule) dont une coupe verticale est donnée par le dessin suivant :

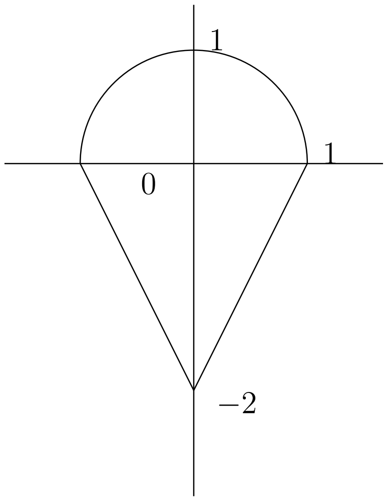

FIG. 1 – Cornet de glace

1. *Calculer le volume de la glace (cornet+boule) par la méthode de votre choix.*

2. *On suppose (pour notre problème) que le cornet a une densité volumique constante* $f(x, y, z) = 2$ *et la boule de glace une densité volumique constante donnée par* $f(x, y, z) = 3$. *Calculer les coordonnées du centre de gravité de la glace : on rappelle que ces coordonnées peuvent se calculer comme suit,*

$$x_G = \frac{\iiint_V x f(x, y, z) dxdydz}{\iiint_V f(x, y, z) dxdydz}, y_G = \frac{\iiint_V y f(x, y, z) dxdydz}{\iiint_V f(x, y, z) dxdydz}$$

$$\text{et } z_G = \frac{\iiint_V z f(x, y, z) dxdydz}{\iiint_V f(x, y, z) dxdydz}$$

3. *Pouvez-vous faire une remarque pertinante sur le résultat obtenu ?*

[5 points]