EXAMEN FINAL

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'attribution de la note. Le barème est donné à titre indicatif. Les calculatrices et une feuille de notes A4 sont autorisées.

Exercice 1 Courbe paramétrée (10 points)

Dans cet exercice on étudie la courbe paramétrée suivante

$$\begin{cases} x(t) &= 9a(1-3t^2) \\ y(t) &= 9at(1-3t^2) \end{cases}$$

Le réel a est une constante positive.

1. Déterminer l'intervalle d'étude de cette courbe.

2. Étudier les variations de x et y.

3. Étudier les branches infinies.

4. On dit qu'une courbe a un point double s'il existe $t_1 \neq t_2$ tel que $x(t_1) = x(t_2)$ et $y(t_1) = y(t_2)$. Montrer que $x(t_1) = x(t_2)$ implique $t_1^2 = t_2^2$. En déduire que si $(x(t_1), y(t_1)) = (x(t_2), y(t_2))$ est un point double alors nécessairement $y(t_1) = y(t_2) = 0$ et donc $t_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $t_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Quelles sont les coordonnées du point double ?

5. Tracer la courbe (on prendra pour le tracé $a = 1$ et on n'oubliera pas de préciser les tangentes remarquables, le point double).

6. On souhaite déterminer l'aire délimitée par la portion de courbe décrite pour $t \in [-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}]$.

a. Déterminer en introduisant une variable r une paramétrisation :

$$\phi : \begin{array}{ccc} [0,1] \times [-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}] & \to & \mathbb{R}^2 \\ (r,t) & \mapsto & \phi(r,t) \end{array}$$

du domaine délimité par la courbe.

b. En déduire un changement de variables adapté au domaine dont on veut calculer l'aire (on montrera que $Jac(\phi)(r,t) = 81a^2 r(1-3t^2)^2$). Calculer cette aire.

c. **Autre méthode :** La courbe paramétrée admet pour équation cartésienne

$$27ay^2 = x^2(9a - x)$$

i. Donner une description de type Fubini du domaine dont on veut calculer l'aire.

ii. **[hors barème]** À l'aide de votre calculatrice (vous décrirez les fonctions de votre calculatrice que vous utilisez) déterminer l'aire et retrouver le résultat de la question **6.b**.

TOURNEZ LA PAGE

Exercice 2 Volume de l'Hyperboloïde (10 points)

Le but de cet exercice est de calculer par plusieurs méthodes le volume d'une hyperboloïde à une nappe (voir figure 1).

1. Première méthode : l'hyperboloïde comme surface de révolution.

a. Soit une courbe dans le plan (Oxy) définie par $y = f(x)$ pour $x \in [a, b]$. Considérons le volume engendré par révolution autour de l'axe (Ox). Démontrer que le volume de ce solide de révolution est donné par :

$$V = \int_a^b \pi f^2(x) dx$$

(On pourra à partir d'un dessin clair expliquer comment le théorème de Fubini permet d'obtenir ce résultat).

b. Soit Γ la courbe définie par $y = \sqrt{1 + x^2}$ pour $x \in [-3, 3]$ (voir figure 2). Déterminer le volume de l'hyperboloïde obtenue par révolution de Γ autour de l'axe (Ox).

2. Deuxième méthode : le changement de coordonnées.
On considère l'hyperboloïde d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ avec $-3 \leqslant z \leqslant 3$. On veut donc déterminer le volume du solide V défini par

$$\left\{ \begin{array}{c} x^2 + y^2 - z^2 \leqslant 1 \\ -3 \leqslant z \leqslant 3 \end{array} \right.$$

a. En utilisant les coordonnées cylindriques ϕ, déterminer le domaine $\mathcal{V}$ tel que $\phi(\mathcal{V}) = V$.

b. Calculer le volume du solide V et retrouver le résultat de la question **1.b**.

3. Généralisation : on souhaite calculer le volume suivant :

$$\tilde{V} \subset \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} \leqslant 1 \\ -k \leqslant z \leqslant k \end{array} \right.$$

(c'est le volume délimité par une hyperboloïde quelconque et les plans $z = -k$ et $z = k$).

a. Proposer un changement de variables adapté à la situation.

b. Déterminer le nouveau domaine d'intégration pour ce changement de variables.

c. Calculer le volume du solide $\tilde{V}$.

d. Peut-on retrouver ce résultat à partir du calcul **2.b** en effectuant un changement de repère ? Expliquer.

4. Proposer une (ou plusieurs) méthode (on ne demande pas de faire les calculs mais d'expliciter la méthode) pour calculer le volume défini par une parboloïde $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - z = 0$ et un plan $z = k > 0$ (figure 3).

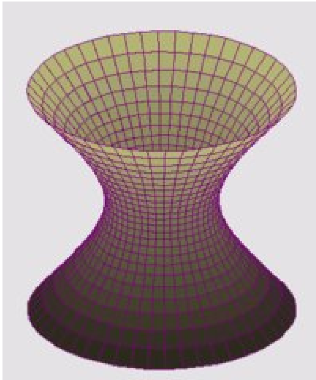

FIG. 1 – Hyperboloïde

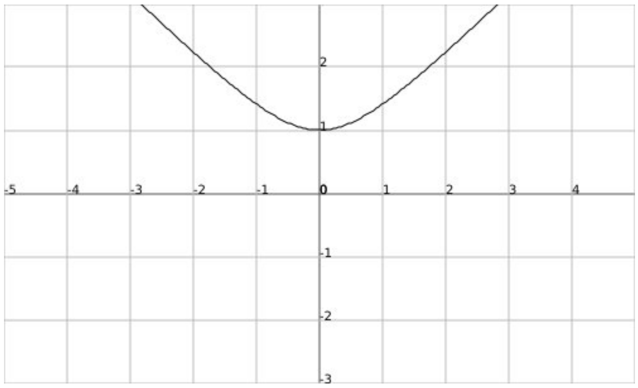

FIG. 2 – Courbe $y = \sqrt{1+x^2}$

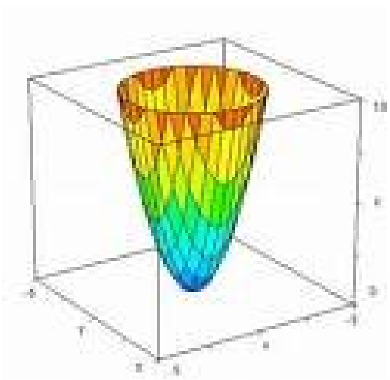

FIG. 3 – Paraboloïde