Final MT21, Printemps 2009

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation de la copie. Le barême, donné à titre indicatif, est susceptible de modification. Une feuille de notes A4 recto-verso est autorisée pour l'épreuve. L'usage des calculatrices est interdite.

Chaque exercice doit être rédigé sur une feuille différente.

Exercice 1 Intégrales (6 points)

Soit $I = \displaystyle\int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=1} \frac{x}{(1+xy)(1+x^2)}\, dx\, dy.$

1. Soit $J = \displaystyle\int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=1} \frac{y}{(1+xy)(1+y^2)}\, dx\, dy.$

a. Calculer $I + J$.
Indication : on pourra développer $(1+xy)(x+y)$.

b. Montrer que $I = J$.

c. En déduire la valeur de I.

2. Calculer $K = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\, dx.$
Indication : on cherchera à appliquer le théorème de Fubini.

Exercice 2 Courbe paramétrée (6 points)

Étudier la courbe définie par $\begin{cases} x(t) = \cos^2 t + \ln(|\sin t|) \\ y(t) = \dfrac{1}{2}\sin(2t) \end{cases}$.

En particulier, on montrera comment réduire l'intervalle d'étude à $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, on étudiera le point singulier, et on tracera une allure de la courbe.

Exercice 3 Le problème (8 points)

Soit $\mathcal{B} = (i, j, k)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ -3 & -8 & 0 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note :

- f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à $\mathcal{B}$ est A.
- Id l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à $\mathcal{B}$ est I.
- h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $h = f - 3\,\mathrm{Id}$.
- N la matrice de h relativement à $\mathcal{B}$.

1. **a.** Vérifier que $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & -8 & -3 \end{pmatrix}$. En déduire que $N^2 \neq O$, et que $N^3 = O$.

b. Montrer que si λ est valeur propre de N, alors $\lambda = 0$. Établir alors que 0 est la seule valeur propre de h.

c. En déduire que f admet 3 comme seule valeur propre.

d. Déterminer une base, et la dimension du sous-espace propre de f associé à la valeur propre 3.

e. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Est-il bijectif ?

2. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$u_1 = (1, -1, 1) \qquad u_2 = h(u_1) \qquad u_3 = h(u_2).$$

a. Calculer u_2 et u_3. Vérifier que $h(u_3) = (0, 0, 0)$.

b. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, que l'on notera $\mathcal{B}'$.

c. Déterminer la matrice N' de h relativement à la base $\mathcal{B}'$.

d. Montrer que la matrice de f relativement à $\mathcal{B}'$ est $3I + N'$.

3. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

a. À l'aide des questions précédentes, montrer que P est inversible, et que

$$A = P(3I + N')P^{-1}.$$

b. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

- Montrer que $A^n = P(3I + N')^n P^{-1}$.
- Justifier que $(N')^3 = O$.
- En déduire qu'il existe trois réels a_n, b_n, et c_n tels que :

$$(3I + N')^n = a_n I + b_n N' + c_n (N')^2.$$

- Montrer que $A^n = a_n I + b_n N + c_n N^2$.