le 29 Juin 2010 UTBM MT21

Final Printemps 2010

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est **une feuille A4 recto-verso rédigée à la main**

Exercice 1 *(8 points)*

Soit l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & A.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{array}$$

où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer les 3 vecteurs $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}), f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}), f(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$.

2) Exprimer les vecteurs $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}), f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}), f(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ *dans la base* $B = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

3) En déduire la matrice de f *dans la base* B, $D = M_{f,B}$.

4) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. P *s'appelle* **la matrice de passage de *B* à la base canonique**.

Déterminer l'inverse P^{-1} *de* P.

5) Calculer $P.D.P^{-1}$ *et comparer le résultat avec les matrices précédentes.*

6) En deduire l'expression de A^2 *en fonction de* P *et* D. *Généraliser à* A^n $(n \in \mathbb{N})$ *en fonction de* P, D *et* n.

7) Calculer D^n.

8) En déduire A^n.

TOURNER LA PAGE SVP

Exercice 2 - *(6 points)*

On considère, dans un repère orthonormé direct (O, i, j), la courbe paramétrée définie par

$$f(t) = (x(t) = \cos(t), y(t) = \sin(2t)).$$

1) Comparer $f(-t)$ a $f(t)$ et $f(t+2\pi)$ à $f(t)$. En déduire qu'on peut étudier cette courbe sur $[0, \pi]$. Expliquer.

2) Etudier les variations de $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sur $[0, \pi]$.

3) Déterminer les tangentes horizontale et verticale a la courbe.

4) Déterminer les points d'intersection de la courbe avec l'axe (Ox).

4) La courbe a-t-elle les points d'inflexions ?

5) Tracer la courbe.

Exercice 3 *(6 points)*

I - Soit, dans $\mathbb{R}^2$ le domaine $D = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2; y \leq 1 + x, y \geq 2x - 1, x \geq 0\}$.

1) Représenter graphiquement D et donner une description hiérarchisée de ce domaine.

2) Déterminer l'aire de D.

3) Déterminer les coordonées du centre de gravité G du domaine D.

II - Intégrer, grâce à un changement de variables, $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ sur $D = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\}$.