le 2 Juillet 2012 UTBM MT21

Final Printemps 2012

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est **une feuille A4 recto-verso rédigée à la main**

Exercice 1 *(8 points)*

Soit l'application lineaire

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & A.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{array}$$

avec $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer le polynôme $P(x) = \det(\mathrm{A} - \mathrm{x.I_3})$ *et trouver ses racines* $x_1 = -a$, $x_2 = 0$ *et* $x_3 = a$.

2) Déterminer le noyau de $f - x_i.I_3$ *pour* $i = 1, 2, 3$.

3) Déduire de la question précédente une base B *dans laquelle la matrice de* f *est*

$$D = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}.$$

Justifier.

4) Quelles sont les matrices de passage $P_{C,B}$ *et* $P_{B,C}$ *telles que* $M_{f,C} = P_{C,B}.M_{f,B}.P_{B,C}$ *où* C *désigne la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *? Vérifier.*

TOURNER LA PAGE SVP

Exercice 2 - *(6 points)*

On considère, dans un repère orthonormé direct (O,i,j), la courbe paramétrée définie par

$$f(t) = (x(t) = \cos(t), y(t) = \sin(2t)).$$

1) Comparer $f(-t)$ à $f(t)$ et $f(t+2\pi)$ à $f(t)$. En déduire qu'on peut étudier cette courbe sur $[0,\pi]$. Expliquer.

2) Etudier les variations de $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sur $[0,\pi]$.

3) Déterminer les tangentes horizontale et verticale a la courbe.

4) Déterminer les points d'intersection de la courbe avec l'axe (Ox).

5) La courbe a-t-elle les points d'inflexions ?

6) Tracer la courbe.

Exercice 3 *(6 points)*

Soit, dans $\mathbb{R}^2$ le domaine $D = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2; y+x \leq 2, 2x-y \leq 0, x \geq 0\}$.

1) Représenter graphiquement D

2) Donner une description hiérarchisée du domaine D.

3) Déterminer l'aire de D.

4) Donner les coordonnées du centre de gravité de D.