

Final Printemps 2014

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est une feuille A4 recto-verso rédigée à la main

Exercice 1 (10 points)

Soit l'application

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+z \\ y \\ x+y+z \end{pmatrix}.$$

- 1) Quelle est la matrice A de l'endomorphisme f dans la base canonique ?
- 2) Déterminer les racines r_1, r_2, r_3 du polynôme $\det(A - x.I_3)$ avec $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 3) Déterminer une base du noyau de $A - r_1.I_3$.
- 4) Déterminer une base du noyau de $A - r_2.I_3$.
- 5) Déterminer une base du noyau de $A - r_3.I_3$.
- 6) Quelle est la matrice D de f dans la base constituée des 3 vecteurs trouvés dans les 3 questions précédentes ?
- 7) Déterminer la matrice de passage P tels que $A = P.D.P^{-1}$.
- 8) Calculer D^n .
- 9) Donner l'expression de A^2 en fonction de P et D . Généraliser à A^n ($n \in \mathbb{N}$) en fonction de P , D et n .
- 10) En déduire A^n en fonction de n pour $n \in \mathbb{N}$.

TOURNER LA PAGE SVP

Exercice 2 (10 points)

I - Soit, dans \mathbb{R}^2 le domaine $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2; y - x^2 \geq -\pi^2, y \leq \sin(x), x \geq 0 \right\}$.

- 1) Représenter graphiquement D et donner une description hiérarchisée de ce domaine.
- 2) Déterminer l'aire de D .
- 3) Déterminer les coordonnées du centre de gravité G du domaine D .