

## Final Printemps 2015

*Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est une feuille A4 recto-verso rédigée à la main*

**Exercice 1** (9 points)

Soit l'application

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x \\ x + y + z \\ z \end{pmatrix}.$$

- 1) Quelle est la matrice  $A$  de l'endomorphisme  $f$  dans la base canonique ?
- 2) Déterminer les racines  $r_1, r_2$  du polynôme  $\det(A - x.I_3)$  avec  $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . On prendra  $r_1 > r_2$ .
- 3) Déterminer une base du noyau de  $A - r_1.I_3$ .
- 4) Déterminer une base du noyau de  $A - r_2.I_3$ .
- 5) On complète la famille  $\{V_1, V_2\}$  ( $V_1$  pour  $r_1$  et  $V_2$  pour  $r_2$ ) constituée des deux vecteurs obtenus aux questions précédente avec le vecteur  $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  pour obtenir la base  $B = \{V_1, V_2, V_3\}$  de  $\mathbb{R}^3$ . Quelle est la matrice  $T$  de  $f$  dans la base  $B$  ?
- 6) Déterminer la matrice de passage  $P$  tels que  $A = P.T.P^{-1}$ .
- 7) Calculer  $T^2, T^3$  et en déduire  $T^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).
- 8) Donner l'expression de  $A^2$  en fonction de  $P$  et  $D$ . Généraliser à  $A^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) en fonction de  $P, D$  et  $n$ .
- 9) En déduire  $A^n$  en fonction de  $n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

**TOURNER LA PAGE S.V.P.**

**Exercice 2** - (7 points)

On considère, dans un repère orthonormé direct  $(O, i, j)$ , la courbe paramétrée définie par

$$f(t) = (x(t) = \cos^3(t), y(t) = \sin^3(t)).$$

1) Comparer  $f(t+2\pi)$  à  $f(t)$ ,  $f(-t)$  à  $f(t)$  et  $f(\pi-t)$  à  $f(t)$ . En déduire qu'on peut étudier cette courbe sur  $[0, \pi/2]$ . Expliquer.

2) Etudier les variations de  $t \mapsto x(t)$  et  $t \mapsto y(t)$  sur  $[0, \pi/2]$ .

3) Déterminer les tangentes horizontale et verticale à la courbe.

4) Déterminer les points d'intersection de la courbe avec les axes  $(Ox)$  et  $(Oy)$ .

5) La courbe a-t-elle les points d'inflexions ( $f''(t) = 0$ ) ?

6) Etudier les points stationnaires ( $f'(t) = 0$ ).

7) Tracer la courbe.

$$\sqrt{2} \simeq 1.414, e \simeq 2,718, \sqrt{3} \simeq 1.732, \pi \simeq 3,1416, \sqrt{7} \simeq 2,646, \sqrt{1326} \simeq 36,414.$$

**Exercice 3** - 4 points

Calculer les coordonnées du centre de gravité du domaine

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y - x^2 \geq 0, y - x \leq 2\}.$$