

Final Printemps 2016

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est une feuille A4 recto-verso rédigée à la main

Exercice 1 (3 points)

Soit $m \in \mathbb{R}$. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & m & m & m^2 - m \\ 1 & m - 1 & 3m - 1 & m^2 - m \\ 0 & m & m & 0 \\ 1 & m & 3m - 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer $\det(A)$. A quelle condition, cette matrice est-elle inversible ?

Exercice 2 - (9 points)

On considère, dans un repère orthonormé direct (O, i, j) , la courbe paramétrée définie par

$$f(t) = (x(t) = \cos(t), y(t) = \sin(2t)).$$

1) Comparer $f(-t)$ à $f(t)$ et $f(t + 2\pi)$ à $f(t)$. En déduire qu'on peut étudier cette courbe sur $[0, \pi]$. Expliquer.

2) Etudier les variations de $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sur $[0, \pi]$.

3) Déterminer les tangentes horizontales et verticales à la courbe.

4) Déterminer les points d'intersection de la courbe avec l'axe (Ox) .

5) La courbe a-t-elle les points d'inflexions ?

6) Tracer la courbe.

Exercice 3 (9 points)

Soit, dans \mathbb{R}^2 le domaine $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2; y - x^2 \geq -\pi^2, y \leq \sin(x), x \geq 0 \right\}$.

1) Représenter graphiquement D et donner une description hiérarchisée de ce domaine.

2) Déterminer l'aire de D .

3) Déterminer les coordonnées du centre de gravité G du domaine D .