

Final Printemps 2017

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est une feuille A4 recto-verso rédigée à la main

Exercice 1 (7 points)

Soit l'application

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+z \\ y \\ x+y+z \end{pmatrix}.$$

1) Quelle est la matrice A de l'endomorphisme f dans la base canonique ?

2) Déterminer les racines r_1, r_2, r_3 du polynôme $\det(A - x.I_3)$ avec $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3) Déterminer une base du noyau de $A - r_1.I_3$.

4) Déterminer une base du noyau de $A - r_2.I_3$.

5) Déterminer une base du noyau de $A - r_3.I_3$.

6) Quelle est la matrice D de f dans la base constituée des 3 vecteurs trouvés dans les 3 questions précédentes ?

7) Déterminer la matrice de passage P tels que $A = P.D.P^{-1}$.

Exercice 2 (6 points)

I - Soit, dans \mathbb{R}^2 le domaine $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2; y \leq 1+x, y \geq 2x-1, x \geq 0 \right\}$.

1) Représenter graphiquement D et donner une description hiérarchisée de ce domaine.

2) Déterminer l'aire de D .

3) Déterminer les coordonnées du centre de gravité G du domaine D .

Exercice 3 (8 points)

Nous nous proposons, dans cet exercice, d'étudier la courbe paramétrée définie par

$$f(t) = (x(t) = \sin t, y(t) = \frac{\sin t}{2 + \cos t}).$$

- 1) en étudiant la périodicité et la parité de x et y , réduire l'intervalle d'étude.
- 2) d'éterminer les éventuels points multiples de f sur l'intervalle ci-dessus.
- 3) Etudier les variations, limites, tangentes de la courbe aux points remarquables.
- 4) Tracer la courbe.

{On donne les approximations suivantes : $\frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0.866$ et $\frac{\sqrt{3}}{3} \simeq 0.577$.}