

## Final Printemps 2018

*Calculatrices et téléphones interdits. Le seul document autorisé est une feuille A4 recto-verso rédigée à la main*

**Exercice 1** (6 points)

Déterminer les racines du polynôme  $\det(A - x.I_3)$  avec  $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et le noyau  $\text{Ker}(A - r.I_3)$  pour chacune des racines  $r$  obtenues, dans les cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 2** - (7 points)

On considère, dans un repère orthonormé direct  $(O, i, j)$ , la courbe paramétrée définie par

$$f(t) = (x(t) = \cos^3(t), y(t) = \sin^3(t)).$$

1) Comparer  $f(t+2\pi)$  à  $f(t)$ ,  $f(-t)$  à  $f(t)$  et  $f(\pi-t)$  à  $f(t)$ . En déduire qu'on peut étudier cette courbe sur  $[0, \pi/2]$ . Expliquer.

2) Etudier les variations de  $t \mapsto x(t)$  et  $t \mapsto y(t)$  sur  $[0, \pi/2]$ .

3) Déterminer les tangentes horizontale et verticale à la courbe.

4) Déterminer les points d'intersection de la courbe avec les axes  $(Ox)$  et  $(Oy)$ .

5) La courbe a-t-elle les points d'inflexions ( $f''(t) = 0$ ) ?

6) Etudier les points stationnaires ( $f'(t) = 0$ ).

7) Tracer la courbe.

$$\sqrt{2} \simeq 1.414, e \simeq 2,718, \sqrt{3} \simeq 1.732, \pi \simeq 3,1416, \sqrt{7} \simeq 2,646, \sqrt{1326} \simeq 36,414.$$

**TOURNER LA PAGE S.V.P.**

**Exercice 3** - 7 points

1. Calculer les coordonnées du centre de gravité du domaine

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y - x^2 \geq 0, y - x \leq 2\}.$$

2. Calculer, grâce aux coordonnées polaires, l'intégrale

$$I = \iint_D \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dx dy$$

pour  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ .