UTBM MT21 le 25 Juin 2019

Arthur Lannuzel http ://mathutbmal.free.fr

Final printemps 2019

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est **une feuille A4 recto-verso rédigée à la main**

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

Exercice 1 *(Applications directes du cours) - 4 points*

Dans cet exercice, aucune question ne nécessite plus de quelques lignes pour être résolue

1) Déterminer une base B de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$coord_B((1,2,3)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2) Peut-on trouver une application linéaire de $E = \mathbb{R}^4$ dans $F = \mathbb{R}^3$, ni injective, ni surjective ? Si oui, donner un exemple, sinon, justifier.

Exercice 2 *- 4 points*

Déterminer les coordonnées du centre de gravité $G = (x_G, y_G)$ du domaine

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \leq 1, y \geq x^2 - 1, y - x - 1 \leq 0\}.$$

TOURNER LA PAGE SVP

Exercice 3 - *12 points*

Si une question pose problème, admettre le résultat de la partie précédente et passer à la partie suivante.

Soit l'application

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ & P(X) & \mapsto & \textit{reste de la division euclidienne de } X.P(X) \textit{ par } X^3 - X \end{array}$$

RAPPEL : la division euclidienne est la division suivant les puissances décroissantes.

PARTIE I :

1) Quelles sont les images des 3 vecteurs de $C = \{1, X, X^2\}$ *par* f *?*

2) Quelles sont les composantes dans C *des 3 images trouvées à la question précédente ?*

3) En déduire la matrice de f *dans la base* C *:* $A = M_{f,C}$.

PARTIE II :

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Trouver une matrice $P \in M_3(\mathbb{R})$ **avec des 1 sur la diagonale** *telle que* $P.D = A.P$ *avec* $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2) P *est la matrice de passage de* C *à une base* $B = \{P(X), Q(X), R(X)\}$ *de* $\mathbb{R}_2[X]$. *Quelle est cette base* B *?*

3) Exprimer A *en fonction de* P *et* D. *Puis* A^2. *Généraliser à* A^n $(n \in \mathbb{N}^*)$.

PARTIE III :

1) Quelles sont les coordonnées de $Q(X) = -1 + 3.X^2$ *dans* B.

2) Déduire de ce qui précède $f^n(-1 + 3.X^2)$ *(où* f^n *désigne la composée* $f \circ f \circ f \circ \ldots \circ f$ *n fois) avec* $n = 100$ *et* $n = 101$. *Généraliser à* n *quelconque.*