le 20 Juin 2022

UTBM MT21

Examen printemps 2022

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est **une feuille A4 recto-verso rédigée à la main**

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

Exercice 1 - *3 points*

Pour $a \in \mathbb{R}$, soit f_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$f_a(x, y, z) = (x + 3.y + a.z, 2.x - y + z, -x + y).$$

Déterminer les $a \in \mathbb{R}$ tels que f_a soit bijective.

Exercice 2 *10 points*

Soient les suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 1$, $v_0 = -1$, $w_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} u_{n+1} & = & u_n & - & 2v_n & + & 2w_n \\ v_{n+1} & = & & - & v_n & + & 2w_n \\ w_{n+1} & = & & & & & w_n \end{array}\right.$$

1. *Déterminer la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A. \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.*

2. *Déterminer les valeurs propres de A et leur multiplicité.*

3. *Déterminer les vecteurs propres de A, une matrice de passage P et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = P.D.P^{-1}$*

4. *exprimer A^2, A^3 en fonction de P et D. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, A^n en fonction de P, D et n.*

5. *En déduire u_n, v_n et w_n en fonction de n.*

TOURNER LA PAGE SVP

Exercice 3 - *2 points*

Soit $(E, <.,.>)$ *un espace préhilbertien.*

Soit $\mathcal{F}$ *une famille d'éléments de* E.

Montrer que

$$\mathcal{F}^{\perp} = (vect(\mathcal{F}))^{\perp}.$$

Exercice 4 - *2 points*

Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$.

Démontrer que

$$\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$$

définit un produit scalaire sur E.

Exercice 5 - *3 points*

On munit $\mathbb{R}^3$ *de son produit scalaire canonique* $<.,.>$.

Orthonormaliser par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt la famille de vecteurs (u_1, u_2, u_3)

avec

$$u_1 = (1,1,0), u_2 = (1,0,1) \text{ } et \text{ } u_3 = (1,1,1).$$