Médian

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'attribution de la note. Le barème est donné à titre indicatif. Une feuille A4 manuscrite est autorisée pour l'épreuve.

Exercice 1

Montrer que la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^4$, $\mathcal{F} = \{ \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \}$ *forme une base de* $\mathbb{R}^4$. *Calculer les coordonnées de du vecteur* $v = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ *dans cette base.* **6 points**

Exercice 2

Soit F l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à trois qui s'annulent en 0 et 1, c'est à dire :

$$F = \{P \in \mathbb{R}_3[X], \text{ tel que } P(0) = 0, P(1) = 0\}$$

.

1. *Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.*

2. *Soit $P = a + bX + cX^2 + dX^3$ un élément de P, montrer que $a = 0$ et $d = -b - c$. En déduire que tout élément de F peut s'écrire $P = b(X - X^3) + c(X^2 - X^3)$. Donner une famille génératrice de F.*

3. *Montrer que $\{X - X^3, X^2 - X^3\}$ est une base de F. Quelle est la dimension de F ?*

7 points

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $f(x, y) = (-\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y; -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y)$.

1. *Vérifier que f est bien une application linéaire et donner la matrice correspondant à f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$*

2. *Soit $A = \begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$.*

- **a.** *Calculer $det(A)$, que pouvez-vous en déduire sur les dimensions de $ker(f)$ et $Im(f)$?*
- **b.** *Calculer A^2, en déduire que $f \circ f = id_{\mathbb{R}^2}$.*

3. *Soient $v_1 = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\{v_1, v_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Écrire la matrice de l'application f dans la base $\{v_1, v_2\}$.*

4. *En vous aidant d'un dessin, sur lequel vous représenterez e_1, e_1, v_1, v_2 et l'image $f(u)$ d'un vecteur $u = xv_1 + yv_2$, expliquez le sens géométrique de l'application linéaire f. Expliquez alors géométriquement le résultat de la question 2b.*

7 points

Correction succinte

Exercice 1

1. *On prouve d'arbord que la famille est libre en montrant que :*

$$\lambda_1 \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

[1,5]

On en déduit que $\mathcal{F}$ est une famille libre de 4 éléments dans $\mathbb{R}^4$. Or $dim\mathbb{R}^4 = 4$, et on sait qu'une famille libre de 4 éléments dans un espace de dimentions 4 est une base. Donc $\mathcal{F}$ est une base. **[1,5]**

2. *Pour calculer les coordonnées de $v = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{F}$ on résout :*

$$\lambda_1 \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Un simple calcul aboutit à $\lambda_1 = -1/4, \lambda_2 = 1/4, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 3/4$ **[3]**

Remarque. Pour cette question qui n'était que calculatoire vous pouvez vérifier facilement votre calcul :

$$-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{3}{4}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Exercice 2

1. *Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$:*

- **a.** *F est bien inclus dans $\mathbb{R}_3[X]$ et $F \neq \emptyset$. En effet $P = 0$ le polynôme nul vérifie bien $P(0) = 0$ et $P(1) = 0$ donc appartient à F.*
- **b.** *Soient P et Q deux éléments de F. Montrons que $P + Q \in F$: $(P+Q)(0) = P(0) + Q(0) = \underbrace{0+0}_{car\ P\in F, Q\in F} = 0$ et $(P+Q)(1) = P(1) + Q(1) = \underbrace{0+0}_{car\ P\in F, Q\in F} = 0$ Donc $P + Q \in F$.*
- **c.** *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in F$. Alors $(\lambda P)(0) = \lambda P(0) = \lambda \times 0$, car $P \in F$ et $(\lambda P)(1) = \lambda P(1) = \lambda \times 0$, car $P \in F$*

  Conclusion F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$. **[2]**

2. *$P = a + bX + cX^2 + dX^3 \in F$. $P(0) = 0 \Rightarrow a = 0$ et $P(1) = 0 \Rightarrow b + c + d = 0$, donc $P = a + bX + cX^2 + dX^3 = 0 + bX + cX^2 - (b+c)X^3 = b(X - X^3) + c(X^2 - X^3)$. Ce calcul montre que tout polynôme de F peut s'écrire sous la forme $\lambda_1(X - X^3) + \lambda_2(X^2 - X^3)$. La famille $\{X - X^3, X^2 - X^3\}$ est donc une famille génératrice de F.* **[2]**

3. *Montrons que* $\{X - X^3, X^2 - X^3\}$ *est une base :*
$\lambda_1(X - X^3) + \lambda_2(X^2 - X^3) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 X + \lambda_2 X^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)X^3 = 0$. *Or un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls. Donc* $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. *La famille est libre. D'après 2. la famille est aussi génératrice de* F*, donc c'est une base de* F *(libre+génératrice). On en déduit* $dim(F) = 2$. **[2]**

Exercice 3

1. *Ici il s'agit de vérifier par le calcul que* $f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)) = f((x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ *et* $\lambda f(x_1, x_2) = f(\lambda x_1, \lambda x_2)$. *On calcule ensuite* $f(1,0) = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ *et* $f(0,1) = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.
La matrice représentant f *est donc* $A = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$. **[2]**

2. **a.** $det(A) = -1$*, donc le noyau de* f *est réduit à l'élément neutre* $\Rightarrow dim(Ker(f)) = 0$.
Donc $dim(Im(f)) = 2$ *puisque* $dim(Ker(f)) + dim(Im(f)) = dim(\mathbb{R}^2) = 2$. **[1]**

b. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$*, or* A^2 *représente l'application linéaire* $f \circ f$ *donc* $f \circ f = id_{\mathbb{R}^2}$. **[1]**

3. *On montre que* $\{v_1, v_2\}$ *est une base en montrant que c'est une famille libre à deux éléments dans* $\mathbb{R}^2$. *Pour écrire* f *dans la base* $\{v_1, v_2\}$*, il faut calculer* $f(v_1)$ *et* $f(v_2)$ **dans la base** $\{v_1, v_1\}$. *Ce qui donne :* $f(v_1) = v_2$ *et* $f(v_2) = v_1$ *(faites le calcul). Donc la matrice représentant* f *dans la base* $\{v_1, v_2\}$ *est :*

$$M_{\{v_1,v_2\}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

[2]

4. *Géométriquement l'application transforme un point de coordonnées* (x, y) *dans la base* $\{v_1, v_2\}$ *en un point de coordonnées* (y, x) *dans cette même base. Il s'agit donc d'une symétrie d'axe* Δ *où* Δ *est la droite passant par* O *est de vecteur directeur* $v_1 + v_2$. *Lorsqu'on applique deux fois une symétrie axiale on revient au point de départ ce qui confirme le résultat de la question 2b.* **[2]**