# MÉDIAN

*La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'attribution de la note. Le barème est donné à titre indicatif. Une feuille A4 recto-verso manuscrite est autorisée pour l'épreuve. Les calculatrices sont autorisées.*

## Exercice 1 base de $\mathbb{R}^3$ — ( 4 points )

Montrer que les vecteurs $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer les coordonnées respectives des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans cette base.

## Exercice 2 un sev de $\mathbb{R}_3[X]$ — ( 5 points )

On considère $\mathbb{R}_3[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à trois. On considère l'ensemble $E \subset \mathbb{R}_3[X]$ défini par

$$E = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(1) = P'(1) = 0\}$$

$E$ est l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que 1 soit une racine (au moins) double.

**1.** Montrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.

**2.** Montrer que $P = a + bX + cX^2 + dX^3 \in E$ si et seulement si $b = -2c - 3d$ et $a = c + 2d$. En déduire que $P = (c - 3d)(X - 1)^2 + d(X - 1)^3$.

**3.** Montrer que $\{(X - 1)^2, (X - 1)^3\}$ est une base de $E$.

**4.** Soit $F \subset \mathbb{R}_3[X]$ défini par $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(2) = P'(2) = 0\}$. On admet (il suffit de refaire les mêmes calculs) que $\{(X - 2)^2, (X - 2)^3\}$ est une base de $F$. Déterminer $E \cap F$.

**5.** En déduire que $\mathbb{R}_3[X] = E \oplus F$. Que pensez-vous de l'affirmation suivante «tout polynôme de degré inférieur à trois s'écrit comme la somme d'un polynôme ayant 1 comme racine (au moins) double et d'un polynôme ayant 2 comme racine (au moins) double».

## Exercice 3 un sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ — ( 5 points )

On note $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Soit

$$\mathcal{G} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ \text{telles que } f(x) = (a + bx + cx^2)e^x\}$$

**1.** Montrer que $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

**2.** Montrer que $e^x, xe^x, x^2e^x$ est une base de $\mathcal{G}$. Quelle est la dimension de $\mathcal{G}$ ?

**3.** On considère l'application linéaire $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $\phi(f) = f'$.

- **a.** Montrer que $\phi(\mathcal{G}) \subset \mathcal{G}$.
- **b.** Calculer les images $\phi(e^x)$, $\phi(xe^x)$ et $\phi(x^2e^x)$. Montrer que les vecteurs $\phi(e^x)$, $\phi(xe^x)$ et $\phi(x^2e^x)$ sont libres. Quelle est la dimension de $\text{Im}(\phi)$ ? En déduire que $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ est surjective.
- **c.** L'application est-elle injective ?

**Exercice 4 endomorphismes nilpotents** ( 6 points )

**1.** Soit $f$ une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique $\{e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ est $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

**a.** Montrer que $A^2 = 0$.

**b.** Calculer $A(e_1)$ où $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

**c.** Montrer que $\{e_1, A(e_1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

**d.** En déduire que $f$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $\{A(e_1), e_1\}$.

**2.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire non nulle telle que $f \circ f = 0$.

**a.** Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$. En déduire que $2\dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant 2$. Quelle est la dimension de l'image ?

**b.** Soit $v$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ tel que $f(v) \neq 0$. Montrer que $\{v, f(v)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ [indication : on pourra calculer $f(\lambda v + \mu f(v))$].

**c.** Écrire la matrice de $f$ dans la base $\{f(v), v\}$.

**Partie à rendre le vendredi 9 mai**

**3.** Soit $g$ une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

**a.** Montrer que $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$.

**b.** Montrer que $e_1, A(e_1), A^2(e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

**c.** En déduire que $g$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $\{A^2(e_1), A(e_1), e_1\}$.

**4.** Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire non nulle telle que $g \circ g \circ g = 0$ et telle que $g \circ g \neq 0$

**a.** Soit $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $g \circ g(v) \neq 0$. Montrer que $\{v, g(v), g \circ g(v)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

**b.** Écrire la matrice de $g$ dans la base $\{g \circ g(v), g(v), v\}$.

**5.** Généralisation. En présentant une démarche inspirée des questions précédentes, montrer qu'un endomorphisme $h : E \to E$, où $E$ est un e.v. de dimension $n$, qui vérifie $\underbrace{h \circ h \circ ... \circ h}_{n \text{ fois}} = 0$ et $\underbrace{h \circ h \circ ... \circ h}_{n-1 \text{ fois}} \neq 0$ peut s'écrire dans une certaine base sous la forme matricielle suivante

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$