le 29 Juin 2010 UTBM MT21

Médian Printemps 2010

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est **une feuille A4 recto-verso rédigée à la main**

Chaque exercice doit être rédigé sur une feuille différente

Exercice 1 - *9 points*

1) Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$ sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ? Si oui, donner leur dimension (justifier).

a) $F = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x = y, x = y + z \}$

b) $G = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x^2 = y \}$

c) $F = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \}$

2) Peut-on trouver $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $vect(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix})$ *?*

3) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, une base de E. Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit $f_a \in End(E)$ par $f_a(e_1) = 0$ et $f_a(e_2) = f_a(e_3) = e_2 - a.e_3$.

Déterminer une base de $Ker(f_a)$ et $Im(f_a)$.

4) a - Montrer que $B = \{1, X + X^2, X^3\}$ est une base de

$$E = \{a + b.X + c.X^2 + d.X^3, a, b, c, d \in \mathbb{R} / b - c = 0\} \subset \mathbb{R}_3[X].$$

b - Quelles sont les coordonnées de $P(X) = 1 + 2X + 2X^2 + 3X^3$ dans B.

TOURNER LA PAGE SVP

Exercice 2 - *5 points*

Soit $E = \mathbb{R}^3$.

On considère le sous-ensemble S *de* E, *formé des vecteurs* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E$ *tels que* $2x - 3y + z = 0$. *Soit, en abrégé :*

$$S = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 ; 2x - 3y + z = 0 \}.$$

1. *Montrer que* S *est un sous-espace vectoriel de* E.
2. *Montrer que les vecteurs* $U = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ *appartiennent à* S.
3. *Montrer que* S *est engendré par* $\{U, V, W\}$.
4. *Est-ce que* $\{U, V, W\}$ *est une base de* S *?*
5. *Donner un supplémentaire de* S *dans* E *(i.e. un sous-espace vectoriel* T *de* E *tel que* $T \oplus S = E$*).*

Exercice 3 *(6 points)*

Soit $\mathbb{R}^3$ *muni de sa base canonique* $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$. *soit* $V_1, V_2, V_3 \in \mathbb{R}^3$ *dont les coordonnées dans* β *sont* $(V_1)_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(V_2)_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(V_3)_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. *Montrer que* $\beta' = \{V_1, V_2, V_3\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$.
2. *Soit*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ a.e_1 + b.e_2 + c.e_3 & \mapsto & (a-b).e_1 + c.e_3 \end{array}$$

   Montrer que f *est un endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$.
3. *Donner les coordonnées de* $f(V_1)$, $f(V_2)$, $f(V_3)$ *dans la base* β.
4. *Donner les coordonnées de* $f(V_1)$, $f(V_2)$, $f(V_3)$ *dans la base* β'.