le 2 Juillet 2012 UTBM MT21

Médian Printemps 2012

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est **une feuille A4 recto-verso rédigée à la main**

Exercice 1 *(Applications directes du cours) - 8 points*

Dans cet exercice, aucune question ne nécessite plus de quelques lignes pour être résolue. Justifier les réponses

1. *Donner 4 sous-espaces vectoriels distincts du $\mathbb{R}$-espace vectoriel défini par*

$$E = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, x = y\}$$

2. *Peut-on construire une application linéaire injective mais non surjective ? Si oui, donner un exemple, sinon, justifier.*

3. *Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, $F = \mathrm{vect}(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2, \mathrm{V}_3)$ avec*

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ ?}$$

4. *A-t-on*

$$\mathrm{vect}(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2, \mathrm{V}_3) + \mathrm{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \mathbb{R}^3 \text{ ?}$$

Cette somme est-elle directe ?

TOURNER LA PAGE SVP

Exercice 2 - *8 points*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4. Soit $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ une base de E.

1) Montrer que la famille $B' = \{b'_1 = b_1 + b_2, b'_2 = b_2 + b_3, b'_3 = b_3 + b_4, b'_4 = b_4\}$ est une base de E.

2) Soit $x \in E$ avec $x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ (coordonnées de x dans la base B).

Quelles sont les coordonnées de x dans la base B' ?

3) Déterminer le rang de la famille $\mathcal{F} = \{b_1 + b_2, 2.b_2 + b_4, b_4 - 2.b_1, b_3 + b_2 + b_4\}$ (i.e. $\dim(\mathrm{vect}(\mathcal{F}))$). Justifier.

4) Donner une base d'un supplémentaire G de $F = \mathrm{vect}(\mathcal{F})$. Justifier.

Exercice 3 - *4 points*

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On définit, dans le base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$, l'application linéaire

$$\begin{array}{cccc} f_A & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & A.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{array}$$

1) Déterminer une base du noyau de f_A.

2) Donner une base de l'image par f de $F = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x - y = 0\}$.

Question supplémentaire - 3 points

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Montrer que l'image par f d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F. Justifier soigneusement.