

## Médian Printemps 2013

*Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est une feuille A4 recto-verso rédigée à la main*

**Exercice 1** (4 points)

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$  ? Justifier.

$$1. F = \left\{ \begin{pmatrix} x + 2y \\ y + z \\ x + y + z \end{pmatrix}; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$2. G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; x^2 \cdot y = 0 \right\}.$$

**Exercice 2** (8 points)

Soit  $E = \mathbb{R}^3$ .

Soit  $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

Soit  $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ .

1. Montrer que  $\mathcal{F}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

2. Déterminer les coordonnées du vecteur  $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$  dans la base  $\mathcal{F}$ .

3. Soit  $V_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ . Déterminer les coordonnées de  $V_0$  dans la base  $\mathcal{F}$  en fonction de  $x_0, y_0$  et  $z_0$ .

4. En déduire la matrice de passage de la base  $\mathcal{F}$  à la base canonique  $\mathcal{C}$ ,  $P_{\mathcal{F},\mathcal{C}}$  telle que

$$\forall V \in \mathbb{R}^3, V_{\mathcal{F}} = P_{\mathcal{F},\mathcal{C}} \cdot V_{\mathcal{C}}.$$

TOURNER LA PAGE SVP

**Exercice 3** (8 points)

1. Montrer que  $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, x + 2z = y \right\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Donner deux vecteurs  $V_1$  et  $V_2$  de  $F$  qui forment une famille libre.
3. Justifier le fait que  $\mathcal{B} = \{V_1, V_2\}$  est une base de  $F$ .
4. Trouver un vecteur  $V_3 \in \mathbb{R}^3$  tel que  $\mathcal{F} = \{V_1, V_2, V_3\}$  soit une base de  $\mathbb{R}^3$ . Justifier.