le 8 Juillet 2014 UTBM MT21

Médian Printemps 2014

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est **une feuille A4 recto-verso rédigée à la main**

Exercice 1 - *4 points*

Les familles suivantes sont-elles des bases de $\mathbf{R}^3$ *? Justifier.*

1 - $F_1 = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \},$

2 - $F_2 = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \},$

3 - $F_3 = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \}$

4 - $F_4 = \{ \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \\ \pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ e \\ 1 \end{pmatrix} \}.$

Exercice 2 - *8 points*

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$*, l'ensemble des polynômes de degré inférieur au égal à* 2 *à coefficients réels.*

Soit $C = \{1, X, X^2\}$ *la base canonique de* E*.*

1. *Montrer que* $B = \{1 + X + X^2, X + X^2, 1 + X\}$ *est une base de* E*.*
2. *Quelles sont les coordonnées de* $Q(X) = 2 + 3X + 2X^2$ *dans* C *et* B *?*
3. *De façon générale quelles sont les coordonnées de* $a + bX + cX^2$ *dans* C *et* B*.*
4. *En déduire la matrices* $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *donnant les coordonnées d'un polynôme* $R(X)$ *dans la base* B *en fonction des coordonnées du même polynôme dans la base* C*. C'est à dire la matrice* P *telle que*
$$\mathrm{coord}_B(R(X)) = P.\mathrm{coord}_C(R(X)).$$

La matrice P *s'appelle* **la matrice de passage de la base *B* à la base *C*.**

TOURNER LA PAGE SVP

Exercice 3 - *8 points*

Soit $\mathbb{R}^3$ *muni de sa base canonique* $B = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$.

Soient $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *4 vecteurs de* $\mathbb{R}^3$.

1. *Montrer que* $B' = \{V_2, V_3, V_4\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$.
2. *A-t-on* $Vect(V_1, V_2) \oplus Vect(V_3) = \mathbb{R}^3$ *?*
3. *Quelles est la dimension de* $G = Vect(V_1, V_3, V_4)$ *?*
4. *Déterminez un supplémentaire* H *de* G *dans* $\mathbb{R}^3$ *(c.a.d. tel que* $G \oplus H = \mathbb{R}^3$*).*

Rappel :

$F \oplus G = E$ *si et seulement si* $F \cap G = \{0\}$ *et* $\forall V \in E, \exists V_1 \in F, \exists V_2 \in G$ *tels que* $V = V_1 + V_2$.