le 30 Juin 2015 UTBM MT21

Médian Printemps 2015

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est **une feuille A4 recto-verso rédigée à la main**

Exercice 1 - *6 points*

Les Ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ? si oui, en donner une base.

1. $F = \{ \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, x, y \in \mathbb{R}\}$.

2. $G = \{ \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+z \\ x-y+z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

3. $H = \{a + a.b.X + b.X^2 \in \mathbb{R}_2[X], a, b \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 2 - *8 points*

Soit $E = \mathbb{R}^3$.

Soit C *la base canonique de* E.

1. *Montrer que* $B = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$ *est une base de* E.

2. *Quelles sont les coordonnées de* $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ *dans* C *et* B *?*

3. *De façon générale, quelles sont les coordonnées de* $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ *dans* C *et* B.

4. *En déduire la matrices* $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *donnant les coordonnées d'un vecteur* V *dans la base* B *en fonction des coordonnées du même vecteur dans la base* C. *C'est à dire la matrice* P *telle que*

$$V_B = P.V_C.$$

La matrice P *s'appelle* **la matrice de passage de la base *B* à la base *C***.

TOURNER LA PAGE SVP

Exercice 3 - *6 points*

On considère dans $E = \mathbb{R}^3$*, les vecteurs :*

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ;\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ;\ c = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} ;\ d = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} ;\ e = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. *Quelle est la dimension de* $vect(a, b, c, d, e)$ *?*
2. *Montrer que le sous-espace engendré par* $\{a, b\}$ *est égal au sous-espace engendré par* $\{c, d\}$*.*
3. *Montrer que* $E = vect(a, b) + vect(e)$*. Cette somme est-elle directe ?*
4. *Compléter la famille* $\{a, c\}$ *en une base de* $\mathbb{R}^3$*.*

Exercice 4 - *2 points*

On considère $B = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$*, base de* $\mathbb{R}^2$*.*

Soit f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^2$ *défini par :*

$$f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ f(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. *Déterminer l'image du vecteur* $U = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ *par* f*.*
2. *Déterminer de façon générale l'image de* $V = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ *par* f*.*