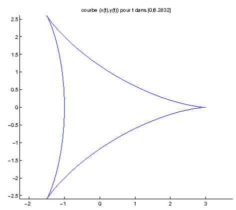
EXAMEN FINAL

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'attribution de la note. Le barème est donné à titre indicatif. Documents autorisés : une feuille de note A4, la feuille sur les quadriques, calculatrices. Vous pouvez aussi utiliser librement le formulaire[1]*.*

Exercice 1 Deltoïde (6 points)

On considère la courbe suivante (ça vous dit quelque chose ?),



d'équations paramétriques,

$$\begin{cases} x(\theta) &= 2\cos(\theta) + \cos(2\theta) \\ y(\theta) &= 2\sin(\theta) - \sin(2\theta) \end{cases}$$

On note D le domaine définie par cette courbe. Le but de l'exercice est de calculer l'aire de D.

1. Montrer que l'application $\phi : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\phi(r, \theta) = (r(2\cos(\theta) + \cos(2\theta)), r(2\sin(\theta) - \sin(2\theta)))$$

est un changement de variables (on admettra que l'application est injective).

2. Déterminer $\Delta \subset \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi]$ tel que $\phi(\Delta) = D$.

3. Calculer l'aire de D.

4. Soit $a > 0$. On considère D_a le domaine délimité par la Deltoïde

$$\begin{cases} x(\theta) &= a(2\cos(\theta) + \cos(2\theta)) \\ y(\theta) &= a(2\sin(\theta) - \sin(2\theta)) \end{cases}$$

En utilisant le même changement de variables ϕ déterminer $\Delta_a \subset \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi]$ tel que $\phi(\Delta_a) = D_a$. En déduire sans calculs que l'aire de D_a est $2\pi a^2$.

Exercice 2 Isométrie (4 points)

1. Comment choisir a et b pour que la matrice suivante soit une isométrie ?

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

2. On choisit $a = \frac{1}{3}$ et $b = -\frac{2}{3}$, déterminer les caractérisitiques de cette transformation.

[1] Formulaire : $\sin(a) + \sin(b) = 2\sin(\frac{a+b}{2})\cos(\frac{a-b}{2}), \sin(a) - \sin(b) = 2\sin(\frac{a-b}{2})\cos(\frac{a+b}{2}), \cos(a) + \cos(b) = 2\cos(\frac{a+b}{2})\cos(\frac{a-b}{2}), \cos(a) - \cos(b) = -2\sin(\frac{a+b}{2})\sin(\frac{a-b}{2})$

Exercice 3 Quadriques et hyperquadriques (12 points)

Les questions **4** *et* **5** *sont indépendantes du début de l'exercice.*

On considère dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la quadrique S d'équation

$$3x^2 + 3y^2 - z^2 - 2xy - 4\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}y - 2z + 3 = 0$$

1. Déterminer l'équation réduite de cette quadrique dans un repère adapté.

2. Représenter sur un même dessin le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et le repère obtenu à la question **1**. Donner une représentation sommaire de S.

3. Quelles sont les transformations géométriques qui permettent de passer du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ au repère de la quesion **1** (on précisera les caractéristiques de ces transformations).

4. Calculer le volume défini dans un repère orthonormé par

$$\begin{cases} 4X^2 + 2Y^2 - Z^2 \leqslant 0 \\ -2 \leqslant Z \leqslant 2 \end{cases}$$

(on remarquera que $4X^2 + 2Y^2 - Z^2 \leqslant 0$ s'écrit aussi $\frac{X^2}{(1/2)^2} + \frac{Y^2}{(\sqrt{2}/2)^2} - Z^2 \leqslant 0$).

5. On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{l})$. L'ensemble des points (x, y, z, w) de $\mathbb{R}^4$ vérifiant $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w + \epsilon = 0$ (avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon \in \mathbb{R}$) est appelé un hyperplan (c'est la généralisation à $\mathbb{R}^4$ de la notion de plan dans $\mathbb{R}^3$). Un hyperplan dans $\mathbb{R}^4$ est une «copie» de $\mathbb{R}^3$.

On considère l'ensemble des points $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ qui vérifient l'équation suivante :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{w^2}{d^2} = 0$$

Cet ensemble est appelé «hypercône», il s'agit de la généralisation à $\mathbb{R}^4$ du cône de $\mathbb{R}^3$.

a. Quelle est l'intersection de l'hypercône et de l'hyperplan $w = a$, pour $a \in \mathbb{R}$?

b. Donner l'équation d'un hyperplan dont l'intersection avec l'hypercône est un cône.

c. On considère dans $\mathbb{R}^4$ une «hyperquadrique», c'est à dire l'ensemble des points de coordonnées $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ qui vérifient

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dw^2 + Exy + Fxz + Gxw + Hyz + Iyw + Kzw + Lx + My + Nz + Ow + P = 0$$

$(A, B, \ldots, P$ sont des réels)

i. Quel serait le plan d'étude d'un tel objet (sans chercher à faire une démonstration complète, vous pouvez indiquer les étapes d'une démarche qui viserait à simplifier l'expression de l'hyperquadrique) ?

ii. Combien de «genres» différents doit-on obtenir au final dans la classification ?