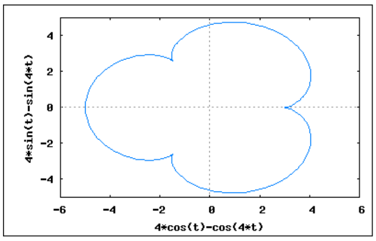
EXAMEN FINAL

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'attribution de la note. Le barème est donné à titre indicatif. Documents autorisés : une feuille de note A4, la feuille sur les quadriques, calculatrices. Vous pouvez aussi utiliser librement le formulaire[1].

Exercice 1 Epicycloïde (8 points)

On considère la courbe Γ suivante (ça vous dit quelque chose ?),



d'équations paramétriques,

$$(\Gamma)\begin{cases} x(\theta) &= 4\cos(\theta)-\cos(4\theta) \\ y(\theta) &= 4\sin(\theta)-\sin(4\theta) \end{cases}$$

On note D le domaine défini par cette courbe.

1. Calculer le jacobien de l'application $\phi : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\phi(r,\theta) = (r(4\cos(\theta)-\cos(4\theta)), r(4\sin(\theta)-\sin(4\theta)))$$

et montrer qu'il est non-nul pour $\theta \neq 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$.

2. Déterminer $\Delta \subset \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi]$ tel que $\phi(\Delta) = D$.

3. Calculer l'aire de D (on admettra que ϕ est un changement de variables).

4. On considère le cône généralisé $\mathcal{C}$ engendré par Γ et le sommet $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. À partir d'un dessin expliquer l'équivalence suivante : $M \in \mathcal{C}$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $m \in \Gamma$ tel que tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \lambda \overrightarrow{mP}$.

5. En déduire qu'une paramétrisation du cône est donnée par $\phi(\theta, \lambda) = \begin{pmatrix} (1-\lambda)x(\theta) \\ (1-\lambda)y(\theta) \\ \lambda \end{pmatrix}$.

6. On considère dans l'espace la rotation r_1 d'axe (Ox) et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et la rotation r_2 d'axe (Oy) et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

- **a.** Écrire dans la base canonique les matrices des rotations r_1 et r_2 puis celle de la rotation $r_2 \circ r_1$.
- **b.** Comment peut-on déterminer les équations paramétriques de $r_2 \circ r_1(\mathcal{C})$?

[1] Formulaire : $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b), \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b), \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b), \cos(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

Exercice 2 Quadriques et surfaces réglées (12 points)

On considère dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ la quadrique S définie par

$$x^2+y^2+z^2-6xz-8\sqrt{2}x=20 \ (S)$$

1. Diagolaniser dans une base orthonormée la matrice

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Déterminer l'équation réduite de cette quadrique dans un repère adapté.

3. Représenter sur un même dessin le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et le repère obtenu à la question **1**. Donner une représentation sommaire de S.

4. Quelles sont les transformations géométriques qui permettent de passer du repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ au repère de la quesion **1** (on précisera les caractéristiques de ces transformations).

5. Calculer le volume défini dans un repère orthonormé par

$$\begin{cases} 4X^2+Y^2-2Z^2 \leqslant 16 \\ -2 \leqslant Z \leqslant 5 \end{cases}$$

(on remarquera que $4X^2+Y^2-2Z^2 \leqslant 16$ s'écrit aussi $\dfrac{X^2}{2^2}+\dfrac{Y^2}{4^2} \leqslant 1+\dfrac{Z^2}{8}$).

6. On considère dans cette question une quadrique $\mathcal{H}$ d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$. Le but de cette question est de prouver que par chaque point $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\mathcal{H}$ il existe une droite Δ passant par M_0 et inclue dans $\mathcal{H}$ (i.e. $\Delta\subset\mathcal{H}$).

a. Soit α un réel non nul. On considère les plans P_1 et P_2 d'équations :

$$\begin{cases} (P_1) : \alpha(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}) = (1-\frac{y}{b}) \\ (P_2) : (\frac{x}{a}-\frac{z}{c}) = \alpha(1+\frac{y}{b}) \end{cases}$$

Montrer que $n_1=(\frac{\alpha}{a},\frac{1}{b},\frac{\alpha}{c})$ et $n_2=(\frac{1}{a},-\frac{\alpha}{b},-\frac{1}{c})$ les vecteurs normaux de P_1 et P_2 ne sont pas colinéaires. En déduire que $P_1\cap P_2$ est une droite que l'on notera Δ_α.

b. Montrer que si $M(x,y,z)\in\Delta_\alpha$ alors $M\in\mathcal{H}$. En déduire que pour tout $\alpha\neq 0$ $\Delta_\alpha\subset\mathcal{H}$.

c. On veut maintenant montrer que pour tout $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\mathcal{H}$ il existe un α tel que $M_0\in\Delta_\alpha$:

i. Montrer que $M_0\in\mathcal{H}\Leftrightarrow(\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c})(\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c})=(1+\frac{y_0}{b})(1-\frac{y_0}{b})$.

ii. Si $1+\frac{y_0}{b}\neq 0$ calculer α tel que M_0 vérifie les équations de P_1 et P_2

iii. Si $1+\frac{y_0}{b}=0$ montrer que M_0 appartient à la droite

$$\Delta_\infty \begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0 \\ y=-b \end{cases} \quad \text{ou à la droite } \Delta_0 \begin{cases} \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=0 \\ y=-b \end{cases}$$

Ces droites sont-elles dans $\mathcal{H}$?

d. Conclure... en faisant un dessin[2]

[2]Pour compléter cette réflexion vous pouvez consulter l'article de Wikipedia sur Vladimir Choukhov concepteur de la tour de Choukhov en 1896 dont la structre architecturale repose sur la propriété que vous venez de démontrer.