EXAMEN FINAL

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'attribution de la note. Le barème est donné à titre indicatif. Documents autorisés : une feuille de note A4, la feuille sur les quadriques, calculatrices.

Exercice 1 L'hyperhyperboloïde (hyperboloïde de dimension 4) (8 points)

Le but de cet exercice est de vous faire généraliser la technique du changement de variables à la dimension 4. On notera (x, y, z) les coordonnées cartésiennes de $\mathbb{R}^3$ et (x, y, z, w) les coordonnées cartésiennes de $\mathbb{R}^4$.

1. Soit $\mathcal{H}_1$ l'hyperboloïde de $\mathbb{R}^3$ définie par l'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

- **a.** Rappeler l'expression de l'application qui exprime les coordonnées cartésiennes (x, y, z) en fonction des coordonnées cylindriques (r, θ, z).
- **b.** Calculer le jacobien de cette application.
- **c.** À l'aide d'une intégrale triple et d'un changement de variables calculer le volume compris entre $\mathcal{H}_1$ et les plans $z = -k$ et $z = k$ c'est à dire le volume du domaine suivant : $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 - z^2 \leqslant 1, -k \leqslant z \leqslant k\})$.

2. On s'intéresse maintenant à l'hyper-hyperboloïde de $\mathbb{R}^4$ d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - w^2 = 1$. Le but de cette question est de calculer l'hypervolume défini par cette hyper-hyperboloïde entre les hyperplans d'équations $w = -k$ et $w = k$.

- **a.** Soit $\Psi : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] \times [0, \pi] \times \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (r, \theta, \phi, w) & \mapsto & (r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\phi, w) \end{cases}$. Cette application correspond au passage en coordonnées hypercylindriques.
  - i. Justifier l'appelation «hypercylindrique» pour ce système de coordonnées (on se demandera comment est repéré sur (Ow) puis sur $(Oxyz)$ la projection d'un vecteur (x, y, z, w) dans ce système de coordonnées) .
  - ii. Calculer la matrice jacobienne J_Ψ et montrer que le jacobien de cette application, $jac(\Psi) = |det(J_\Psi)|$ vaut $jac(\Psi) = r^2 \sin\phi$.
- **b.** Par analogie avec la formule du changement de variables pour l'intégrale double et triple donner, sans preuves, la formule analogue pour calculer $\iiiint_D f(x, y, z, w)dxdydzdw$ à l'aide d'un changement de variables $\Psi : \Delta \to D$.
- **c.** Montrer que l'on peut calculer par changement de variables le volume défini par $\mathcal{H}_2$ et les hyperplans $w = -k$ et $w = k$ c'est à dire l'hypervolume du domaine $D = \{(x, y, z, w), x^2 + y^2 + z^2 - w^2 \leqslant 1, -k \leqslant w \leqslant k\}$. **Attention on ne cherchera pas à calculer le résultat**, on se contentera d'écrire le plus précisemment Δ tel que $\Psi(\Delta) = D$ et de donner l'expression de la nouvelle intégrale après changement de variables.

Exercice 2 Isométrie (7 points)

1. Montrer que la matrice A suivante est une matrice orthogonale

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Déterminer les caractéristiques géométriques de l'isométrie représentée par A.

3. On considère la généralisation suivante : soient a et b deux réels et soit B la matrice

$$B = \frac{1}{\sqrt{2a^2+b^2}} \begin{pmatrix} a & a & b \\ b & a & a \\ a & b & a \end{pmatrix}$$

a. Donner une condition sur a et b pour que B soit orthogonale.

b. Quelle condition supplémentaire doit on demander pour que B soit une matrice de rotation ?

c. Si B est une matrice de rotation, est-ce que B peut-être une symétrie axiale (i.e. rotation d'angle π) ?

Exercice 3 Quadriques (8 points)

On considère dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la quadrique définie par

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy + 4\sqrt{2}x - 8\sqrt{2}y + 4z = 0 \ (S)$$

1. Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ dans une base orthonormé.

2. Déterminer l'équation réduite de cette quadrique dans un repère adapté.

3. Représenter sur un même dessin le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et le repère dans lequel s'exprime la quadrique sous forme réduite (question **2**). Donner les caractéristiques géométriques des transformations qui permettent de passer du repère initiale au repère final.

4. Représenter sommairement (S).

5. Soit α un paramètre réel. On considère la famille de quadriques suivantes :

$$2x^2 + 2y^2 + \alpha z^2 - 2xy + 4\sqrt{2}x - 8\sqrt{2}y + 2\alpha z = 0 \ (S_\alpha)$$

a. Sans refaire tous les calculs mais en vous aidant des questions précédentes quelle est la nature des quatriques dans les trois cas suivants :

i. $\alpha < 0$

ii. $\alpha = 0$

iii. $\alpha > 0$

b. Illustrer ces comportements sur un dessin.

c. Donner l'équation de la conique C_α correspondant à l'intersection de (S_α) avec le plan d'équation $x = 0$. Expliquer avec un dessin que l'on trouve :

i. Une hyperbole si $\alpha < 0$

ii. Deux droites parallèles si $\alpha = 0$

iii. Une ellipse si $\alpha > 0$

Exercice 1 L'hyper-hyperboloïde (8 points)

1. **a.** $\phi(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ **[0.5 point]**
   b. $jac(\phi) = r$ **[0.5 point]**
   c. On considère le domain $\Delta = \{(r,\theta,z), 0 \leqslant r \leqslant \sqrt{1+z^2}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, -k \leqslant z \leqslant k\}$ alors $\phi(\Delta) = D$ et par la formule du changement de variables on $\iiint_D dxdydz = \iiint_\Delta rdrd\theta dz$. On calcule donc cette dernière intégrale $\iiint_D rdrd\theta dz = \int_{-k}^{k}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{1+z^2}} rdrd\theta = \int_{-k}^{k}\int_0^{2\pi}[\dfrac{r^2}{2}]_0^{\sqrt{1+z^2}} d\theta dz = \int_{-k}^{k}(1+z^2)2\pi dz = [(z+\dfrac{z^3}{3}]_{-k}^{k} = 4\pi(k+\frac{k^3}{3})$ **[2 points]**
2. **a.** On remarque que dans l'espace $Oxyz$ la projection est repérée par les coordonnées sphériques, la coordonnée en w restant la même. On a bien une analogie avec les coordonnées cylindriques où la projection sur Oxy est repérée en coordonnée polaire (la coordonnée en z restant idendique).**[0,5 point]**
   b.
$$J(\Psi) = \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\phi & -r\sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\cos\phi & 0 \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi & 0 \\ \cos\phi & 0 & -r\sin\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   Le calcul du déterminant donne $-r^2\sin\phi$. D'où en prenant la valeur absolue $jac(\Psi) = r^2\sin\phi$.**[1,5 points]**
3. Par annalogie la formule du changement de variables, en coordoonnées hyper-cylindriques, pour une intégrale quadruple est
$$\iiiint_D f(x,y,z,w)dxdydzdw = \iiiint_\Delta f(r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\phi, w)r^2\sin\phi drd\theta d\phi dw$$
   (rem : on comptera aussi les points si l'étudiant(e) écrit $iiiint_D f(x,y,z,w)dxdydzdw = \iiint_\Delta f\circ\Psi(r,\theta,\phi,w)jac(\Psi)drd\theta d\phi dw)$ **[1,5 points]**
4. Pour cette question $\Delta = \{(r,\theta,\phi,w), 0 \leqslant r \leqslant \sqrt{1+w^2}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\phi, 0 \leqslant \phi \leqslant \pi, -k \leqslant z \leqslant k\}$. En appliquant la formule du changement de variables établies à la question précédente on a
$$\iiiint_D dxdydzdw = \iiiint_\Delta r^2\sin\phi drd\theta d\phi dw$$
   C'està dire l'hypervolume à calculer est
$$\int_{-k}^{k}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{1+w^2}} r^2\sin\phi drd\theta d\phi dw = 4\pi\int_{-k}^{k}\frac{\sqrt{(1+w^2)^3}}{3}dw$$
   [1,5 points]

Exercice 2 Isométries (7 points)

1. $A^tA = I$ **[0,75]**
2. $detA = -1$ c'est une isométrie indirecte. On recheche le vecteur propre de valeur propre -1, on trouve $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Enfin pour le calcul de l'angle on a $trace(A) = -2$ donc $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$

soit $\theta = \pm acrcos(-\frac{1}{2}) = \pm\frac{2\pi}{3}$. On obtient le signe de l'angle en calculant le déterminant $det(v, u, Au)$ où u est un vecteur non colinéaire à v. En prenant $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ on obtient $det(v, u, Au) < 0$ donc $\theta = -\dfrac{2\pi}{3}$. **[0,75+1+1,5]**

3. **a.** $a^2 + 2ab = 0$ ce qui donne $a = 0$ ou $a = -2b$ **[1 point]**

b. Si $a = 0$ alors B est une matrice de rotation pour $b = 1$. Si $a \neq 0$ alors $a = -2b$ ou bien $a = 1$ et $b = 0$ (identité). Pour $a = -2b$ en remplaçant dans B on trouve que le déterminant de B est positif si $b < 0$ **[1 point]**.

c. Si $b < 0$ on trouve $trace(B) = 2$ donc $\theta = \pm\dfrac{\pi}{3} \neq \pi$ on ne peut donc pas avoir de symmétrie axiale **[1 point]**

Exercice 3 Quadriques (8 points)

1. Les valeurs propres sont $\lambda = 1, 2, 3$. Les vecteurs propres normés associés sont $v_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$. Dans la base $\{v_3, v_1, v_2\}$ la matrice A se diagonalise sous la forme suivante

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage est donnée par les vecteurs de la nouvelle base $P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

[2 points]

2. Dans (O, v_3, v_1, v_2), l'équation (S) s'écrit, $3X^2 + Y^2 + 2Z^2 + 12X - 4Y + 4Z = 0$. En notant $\Omega(-2, 2, -1)$ et $(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z})$ les coordonnées dans (Ω, v_3, v_1, v_2) on obtient l'équation réduite suivante

$$3\tilde{X}^2 + \tilde{Y}^2 + 2\tilde{Z}^2 = 18$$

[1,5 points]

3. D'après la matrice de passage P le nouveau repère s'obtient en effectuant une rotation d'axe (Oz) et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$ puis une translation de vecteur $-2v_3 + 2v_1 - v_2$. **[1 point]**

4. ellipsoide **[0,5 point]**

5. **a.** Les calculs précédent donnerait comme équation réduite $3\tilde{X}^2 + \tilde{Y}^2 + \alpha\tilde{Z}^2 = 16 + \alpha$.

i. Si $\alpha < 0$ c'est une hyperboloïde à une nappe,

ii. si $\alpha = 0$ c'est un cylindre elliptique,

iii. si $\alpha > 0$ c'est une ellipsoïde. **[1,5 points]**

b. **[0,5 points]**

c. Dans le plan $\{x = 0\}$ l'équation de la quadrique devient $2y^2 + \alpha z^2 - 8\sqrt{2}y + 2\alpha z = 0$. Cela revient à intersecter l'une des trois surfaces de la question précédente par un plan vertical. Si $\alpha < 0$ c'est l'intersection d'une hyperboloïde à une nappe avec un plan vertical : on obtient une hyperbole. Si $\alpha = 0$ c'est l'intersection d'un cylindre avec un plan vertical, on obtient donc deux droites. Enfin si $\alpha > 0$ c'est l'intersection d'une ellipsoïde avec un plan, on obtient une ellipse. **[1 point]**