Exercice 1

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(f)$$

1. (a) Vérifions que la matrice A est orthogonale. Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A.
   - $\langle C_1 \mid C_2 \rangle = \frac{1}{9}(2.(-1) + 2\times 2 + (-1).2) = \frac{1}{9}(-2+4-2) = 0$
   - $\|C_1\|^2 = \langle C_1 \mid C_1 \rangle = \frac{1}{9}(2^2+2^2+(-1)^2) = \frac{1}{9}(4+4+1) = \frac{9}{9} = 1$
   - $\|C_2\|^2 = \langle C_2 \mid C_2 \rangle = \frac{1}{9}((-1)^2+2^2+2^2) = \frac{1}{9}(1+4+4) = \frac{9}{9} = 1$
   - $C_1 \wedge C_2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4-(-2) \\ 1-4 \\ 4-(-2) \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$
     $= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = C_3$

   Donc $C_3 = C_1 \wedge C_2$ est orthogonal à la fois à C_1 et à C_2 et
   $\|C_3\| = \|C_1 \wedge C_2\| = \|C_1\| \times \|C_2\| \times \sin\left(\widehat{C_1\,,\,C_2}\right) = \|C_1\|\ \|C_2\| \sin\frac{\pi}{2} = 1$
   Les vecteurs colonnes de A forment une base orthonormale directe de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ ce qui signifie que la matrice A est orthogonale directe : $A \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et $\det(A) = 1$

   (b) Puisque $A \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$, la matrice A représente une isométrie directe de $\mathbb{R}^3$, autrement dit f une rotation vectorielle de $\mathbb{R}^3$.

   (c) En tant que rotation vectorielle de $\mathbb{R}^3$ distincte de l'identité (car $A \neq I_3$), f admet 1 comme valeur propre et la dimension du sous-espace propre associé $E_1(f)$ est égale à 1.

   Si $f \in \mathcal{SO}(\mathbb{R}^3)$ était diagonalisable, alors -1 serait l'autre valeur propre de f et la dimension du sous-espace propre associé $E_{-1}(f)$ serait égale à 2. Donc f serait une symétrie orthogonale par rapport à une droite et on devrait avoir $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ puis $A^2 = I_3 = A\,{}^tA$. Ainsi A serait symétrique, ce qui n'est pas le cas.

   Par conséquent $\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable dans } \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})}$.

2. $\mathcal{D} = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$. On pose $u = (x, y, z)$.
   Alors $u \in \mathcal{D} \iff f(u) = u \iff f(3u) = 3u$

$$\iff \begin{cases} 2x - y + 2z = 3x \\ 2x + 2y - z = 3y \\ -x + 2y + 2z = 3z \end{cases} \iff \begin{cases} -x - y + 2z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x - y + 2z = 0 & \\ -3y + 3z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ 3y - 3z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = t \\ y = t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = t \end{cases}$$

   On pose $\boxed{\overrightarrow{n} = (1,1,1)}$. Alors l'axe $\mathcal{D}$ est dirigé et orienté par le vecteur $\overrightarrow{n}$.

3. On note θ l'angle de la rotation f.

   (a) On sait que dans une base adaptée, f a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

   D'où $\mathrm{Tr}(A) = 1 + 2\cos\theta = \frac{6}{3} = 2$ puis $\boxed{\cos\theta = \frac{1}{2}}$.

   (b) La matrice colonne des coordonnées de $f(e_1)$ dans la base $\mathscr{B}_0$ est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(f(e_1)) = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   D'où $\det_{\mathscr{B}_0}(\overrightarrow{n}\,,\, e_1\,,\, f(e_1)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2/3 \\ 1 & 0 & 2/3 \\ 1 & 0 & -1/3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

   $= -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{(-3)}{3} = \boxed{1}$

   (c) Déterminons le signe de $\sin\theta$. Il est clair que e_1 n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{n}$. Alors $\sin\theta$ est du signe de $\det_{\mathscr{B}_0}(\overrightarrow{n}\,,\, e_1\,,\, f(e_1))$.

   Donc $\sin\theta > 0$. Or $\cos\theta = \frac{1}{2}$. Donc $\boxed{\theta = \frac{\pi}{3}}$ modulo 2π.

4. Soit p la projection orthogonale sur $\mathcal{D}$.

   (a) $\mathrm{Kep}(p) = \mathcal{D}^{\perp}$; $\mathrm{Im}(p) = \mathcal{D}$; $p \circ p = p$

   (b) $\left(\frac{\overrightarrow{n}}{\|\overrightarrow{n}\|}\right)$ constitue une base orthonormale de $\mathcal{D}$.

   On sait alors que $\forall u \in \mathbb{R}^3,\ p(u) = \left\langle u \mid \frac{\overrightarrow{n}}{\|\overrightarrow{n}\|}\right\rangle \frac{\overrightarrow{n}}{\|\overrightarrow{n}\|} = \frac{\langle u \mid \overrightarrow{n}\rangle}{\|\overrightarrow{n}\|^2}\overrightarrow{n}$

   avec $\|\overrightarrow{n}\|^2 = 3$.

   D'où $p(e_1) = \frac{\langle e_1 \mid \overrightarrow{n}\rangle}{3}\overrightarrow{n} = \frac{1}{3}\overrightarrow{n}$ et $p(e_2) = p(e_3) = \frac{1}{3}\overrightarrow{n}$.

On obtient donc

$$B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(p) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Le vecteur $\overrightarrow{n} = (1,1,1)$ est normal au plan $\mathcal{D}^{\perp}$. On choisit une base quelconque du plan $\mathcal{D}^{\perp}$: $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ avec par exemple $\varepsilon_1 = (1,-1,0)$ et $\varepsilon_2 = (1,0,-1)$.

Alors la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \overrightarrow{n})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ dans la laquelle la matrice de la projection orthogonale p est :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous avons $B = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2

Partie A : inégalité de Cauchy-Schwarz

1. Soit f, g et h trois fonctions de E. Soit λ un réel.

(i)

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda f + h\,,\, g) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\lambda f + h)(x)\, g(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\lambda f(x) + h(x)) g(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\lambda f(x)g(x) + h(x)g(x))\,\mathrm{d}x \\
&\underset{\text{(linéarité)}}{=} \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(x)g(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \lambda\,\varphi(f\,,\,g) + \varphi(h\,,\,g)
\end{aligned}$$

Donc φ est linéaire par rapport à la première variable.

(ii) $\varphi(g,f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g(x)f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(f,g)$.

Donc φ est symétrique.

(iii) $\varphi(f,f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x$. Or $\forall\, x \in [0, 2\pi],\ f^2(x) \geqslant 0$.

Donc $\varphi(f,f) \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale. Par conséquent φ est positive.

(iv) On suppose que $\varphi(f,f) = 0$. Alors $\displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Or la fonction $x \mapsto f^2(x)$ est continue et positive sur $[0, 2\pi]$ (avec $0 < 2\pi$). Donc, d'après le théorème de positivité stricte, $\forall\, x \in [0, 2\pi],\ f^2(x) = 0$ c'est-à-dire $f = \widetilde{0}_E$.

Par conséquent φ est définie positive.

Ainsi φ est un produit scalaire sur E.

2. Soit $f \in E$.

(a) On considère la fonction constante $\boxed{g : x \longmapsto 1}$. Alors $g \in E$.

Puisque E est un espace préhilbertien réel, on peut appliquer l'**inégalité de Cauchy-Schwarz** :

$$|\langle g \mid f\rangle| \leqslant \|g\| \cdot \|f\| \text{ qui s'écrit ici } \left(\varphi(g\,,\,f)\right)^2 \leqslant \varphi(g\,,\,g)\cdot\varphi(f\,,\,f)$$

Or $\varphi(g\,,\,f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} 1 \times f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\varphi(g\,,\,g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} 1^2\,\mathrm{d}x = 1$

On en déduit que $\left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant 1 \times \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

En multipliant chaque membre de cette inégalité par $(2\pi)^2$, il vient :

$$\left(\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant 2\,\pi \int_0^{2\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

(b) Toujours d'après Cauchy-Schwarz, on a l'égalité $|\langle g \mid f\rangle| = \|g\| \cdot \|f\|$ qui est équivalente à $\left(\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \overset{(\star)}{=} 2\,\pi \displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x$ si, et seulement si, la famille (f, g) est liée, c'est-à-dire s'il existe un réel k tel que $f = k\,g$.

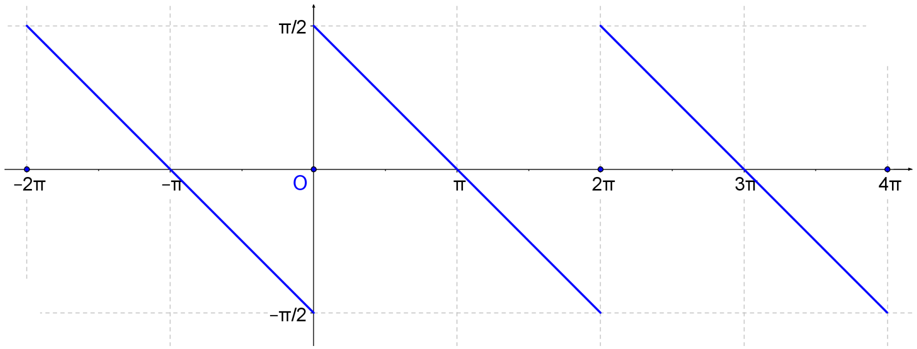
Autrement dit, on a l'égalité $(\star)$ ssi f est constante sur $[0, 2\pi]$.

Partie B : séries de Fourier

On définit f sur $\mathbb{R}$, impaire et 2π-périodique, par :

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, x \in]0\,,\,2\pi[,\ f(x) = \frac{\pi - x}{2}$$

1. Représentation graphique de f sur l'intervalle $[-2\pi\,,\,4\pi]$:



2. (a) f étant impaire, la fonction $x \longmapsto f(x)\,\cos(nx)$ est impaire et continue par morceaux sur $[-\pi, \pi]$.

   D'où $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0$. Ainsi $a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

   et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0$

   Justifier que, pour tout entier naturel n, $\quad a_n = 0$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2}\,\sin(nx)\,\mathrm{d}x$

   $= \dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin(nx)\,\mathrm{d}x - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} x\,\sin(nx)\,\mathrm{d}x\right)$

   $= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin(nx)\,\mathrm{d}x - \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} x\,\sin(nx)\,\mathrm{d}x$

   Or $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{2\pi} = -\frac{1}{n}\left(\cos(2n\pi) - \cos(0)\right) = 0$

   et on a admis que $\displaystyle\int_0^{2\pi} x\,\sin(nx)\,\mathrm{d}x = -\frac{2\pi}{n}$

   Donc $b_n = 0 - \dfrac{1}{2\pi}\left(-\dfrac{2\pi}{n}\right)$. Finalement $\boxed{b_n = \dfrac{1}{n}}$

3. Soit x un nombre réel. La série de Fourier de f en x est la série :

$$S(f)(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n\,\cos(nx) + b_n\,\sin(nx)\right] = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$$

   La fonction f est 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Le **théorème de Dirichlet** permet de dire que la série $\sum \dfrac{\sin(nx)}{n}$ est convergente et que sa somme vérifie :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n} = \frac{1}{2}\left(\lim_{t\to x^-} f(t) + \lim_{t\to x^+} f(t)\right)$$

   - Si $\forall\, k \in \mathbb{Z},\ x \neq 2k\pi$ alors f est continue en x donc $\displaystyle\lim_{t\to x^-} f(t) = \lim_{t\to x^+} f(t) = f(x)$ puis $S(f)(x) = f(x)$.
   - Si $\exists\, k \in \mathbb{Z}\,;\ x = 2k\pi$ alors $\displaystyle\lim_{t\to x^-} f(t) = -\frac{\pi}{2}$ et $\displaystyle\lim_{t\to x^+} f(t) = \frac{\pi}{2}$ donc $\dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\lim_{t\to x^-} f(t) + \lim_{t\to x^+} f(t)\right) = 0 = f(2k\pi) = f(x)$

   Dans les deux cas :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n} = f(x)$$