

Exercice 1 (a)

1. Il existe une matrice carrée $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_3$. FAUX
 sinon on aurait $\det(A^2) = \det(-I_3)$ d'où $(\det(A))^2 = (-1)^3 \det(I_3) = -1$
 ce qui est impossible car $\det(A) \in \mathbb{R}$ et $(\det(A))^2 \geq 0$.
2. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$. VRAI
 car elle est symétrique à coefficients réels.
3. Dans \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire usuel, le projeté orthogonal de $\vec{u} = (1, 2, 3)$
 sur le plan F d'équation $x + y + z = 0$, est $\vec{w} = (1, -2, 1)$. FAUX
 car $\vec{u} - \vec{w} = (0, 4, 2)$ n'est pas colinéaire à $\vec{n} = (1, 1, 1)$.
 Donc $\vec{u} - \vec{w}$ n'appartient pas à F^\perp .

4. Dans la base canonique \mathcal{B}_0 de \mathbb{R}^3 , la matrice $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$

représente une rotation d'axe dirigé par $\vec{n} = (1, 1, 0)$. VRAI

Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A . On vérifie que :

- $\langle C_1 | C_2 \rangle = 0$
- $\|C_1\|^2 = \|C_2\|^2 = 1$
- $C_1 \wedge C_2 = C_3$

Donc les vecteurs colonnes de A forment une base orthonormale directe de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ ce qui signifie que la matrice A est orthogonale directe et représente bien une rotation de \mathbb{R}^3 dont l'angle n'est pas égal à zéro modulo π car $A \neq I_3$ et A n'est pas symétrique.

Posons $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ la matrice colonne des coordonnées de \vec{n} dans \mathcal{B}_0 .

On vérifie que $AX = X$ ce qui signifie que \vec{n} est invariant par la rotation de matrice A dans \mathcal{B}_0 .

5. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π -périodique définie par :
 $\forall x \in]-\pi, \pi], f(x) = x^2$. Alors f est partout égale à la somme de sa série de Fourier. VRAI.

Conséquence du théorème de Dirichlet dans le cas d'une fonction f , continue sur \mathbb{R} , 2π -périodique et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux sur \mathbb{R} .

Exercice 1 (b)

1. Soit $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ une matrice carrée d'ordre 3 à coefficients complexes telle que $A^3 = I_3$. Alors le déterminant de A est nécessairement égal à 1. FAUX
 Comme $A^3 = I_3$, on a $\det(A^3) = \det(I_3) = 1$ d'où $(\det(A))^3 = 1$. Or $\det(A) \in \mathbb{C}$.
 Donc $\det(A)$ est une racine cubique de l'unité :
 $\det(A) = 1$ ou $\det(A) = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ou $\det(A) = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

2. La matrice $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ -8 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$. VRAI.

cette matrice étant triangulaire inférieure, ses valeurs propres sont les coefficients de sa diagonale : 4, 1 et 0. Comme elle est d'ordre 3, et admet 3 valeurs propres 2 à 2 distinctes, cette matrice est diagonalisable.

3. Dans \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire usuel, le projeté orthogonal du vecteur $\vec{u} = (1, 2, 3)$ sur le plan F d'équation $x + y + z = 0$, est le vecteur $\vec{w} = (-1, 0, 1)$. VRAI
 car $\vec{w} \in F$ et $\vec{u} - \vec{w} = (2, 2, 2) \in F^\perp$.

4. Dans la base canonique \mathcal{B}_0 de \mathbb{R}^3 , la matrice $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ représente une symétrie orthogonale par rapport à un plan. FAUX
 car la matrice d'une symétrie orthogonale doit être à la fois orthogonale et symétrique. Mais A n'est pas symétrique.

5. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -périodique définie par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \pi] \\ -1 & \text{si } x \in]-\pi, 0[\end{cases}$
 Alors f est partout égale à la somme de sa série de Fourier. FAUX
 D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f converge en tout point vers **la régularisée** de f qui est la fonction $x \mapsto \frac{1}{2} (f(x^-) + f(x^+))$

$$\forall x \in \mathbb{R}, a_0(f) + \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx)) = \frac{1}{2} \left(\lim_{t \rightarrow x^-} f(t) + \lim_{t \rightarrow x^+} f(t) \right)$$

Mais ici, $1 = f(0) \neq \frac{1}{2} \left(\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) + \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) \right) = 0$

Exercice 2

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(n+1)^2}{n!} 2^n$$

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+2)^2}{(n+1)!} 2^{n+1} \times \frac{n!}{(n+1)^2 2^n} = \frac{2(n+2)^2}{(n+1)^3} \underset{(n \rightarrow +\infty)}{\sim} \frac{2n^2}{n^3} = \frac{2}{n}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$. D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$ avec $0 < 1$.

La règle de d'Alembert permet de conclure que la série $\sum u_n$ est convergente.

2. On suppose qu'il existe trois constantes réelles a, b et c telles que pour tout entier naturel $n, (n+1)^2 = an(n-1) + bn + c$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + 2n + 1 = an^2 + (b-a)n + c$. Donc, par identification,

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 2 \\ c = 1 \end{cases} \quad \text{. Puis } a = 1, b = 3 \text{ et } c = 1.$$

On vérifie ensuite que $\forall n \in \mathbb{N}, n(n-1) + 3n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.

3. Les séries exponentielles $\sum \frac{1}{n!} 2^n$, $\sum \frac{n}{n!} 2^n$ et $\sum \frac{n(n-1)}{n!} 2^n$ sont convergentes et on rappelle que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} 2^n = e^2$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)^2}{n!} 2^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{n(n-1) + 3n + 1}{n!} \right) 2^n \quad \text{d'après 2.} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!} 2^n + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} 2^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} 2^n \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n(n-1)(n-2)!} 2^n + 3 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n(n-1)!} 2^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} 2^n \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} 2^n + 3 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} 2^n + e^2 \\ &= 4 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} 2^{n-2} + 3 \times 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} 2^{n-1} + e^2 \\ &= 4 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} 2^k + 6 \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} 2^j + e^2 \\ &= 4e^2 + 6e^2 + e^2 \end{aligned}$$

Ainsi $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)^2}{n!} 2^n = 11e^2$

Exercice 3

On pose pour tout réel $t > 0,$ $\begin{cases} x(t) = t^2 \ln t \\ y(t) = t(\ln t)^2 \end{cases}$

1. Les fonctions x et y sont dérivables sur l'intervalle $]0, +\infty[$

et $\forall t > 0,$ $\begin{cases} x'(t) = 2t \ln t + t^2 \frac{1}{t} = t(1 + 2 \ln t) \\ y'(t) = (\ln t)^2 + t(2 \ln t) \frac{1}{t} = (2 + \ln t) \ln t \end{cases}$

2. • Pour $t > 0, x'(t)$ est du signe $1 + 2 \ln t$.

$$x'(t) > 0 \iff 1 + 2 \ln t > 0 \iff \ln t > -1/2 \iff t > e^{-1/2}$$

• $y'(t) = 0 \iff 2 + \ln t = 0$ ou $\ln t = 0 \iff t = e^{-2}$ ou $t = 1$

• Tableau de signes pour obtenir le signe de $y'(t)$:

t	0	e^{-2}	1	$+\infty$
$2 + \ln t$	-	0	+	+
$\ln t$	-	-	0	+
$y'(t)$	+	0	-	+

• Calculons les images par les fonctions x et y des réels : 1, e^{-2} , $e^{-1/2}$

$x(1) = y(1) = 0$; $x(e^{-2}) = e^{-4} \ln(e^{-2}) = -2e^{-4}$;

$y(e^{-2}) = e^{-2} (\ln(e^{-2}))^2 = 4e^{-2}$; $x(e^{-1/2}) = e^{-1} \ln(e^{-1/2}) = -\frac{1}{2}e^{-1} = -\frac{1}{2e}$;

$y(e^{-1/2}) = e^{-1/2} (\ln e^{-1/2})^2 = e^{-1/2} \frac{1}{4} = \frac{1}{4\sqrt{e}}$

• On a admis que $\lim_{t \rightarrow 0} t \ln t = 0$ et que $\lim_{t \rightarrow 0} t (\ln t)^2 = 0$.

Alors $\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = 0$. On prolonge donc par continuité en zéro les fonctions x et y en posant $x(0) = y(0) = 0$.

Étudions à présent la dérivabilité en zéro des fonctions x et y .

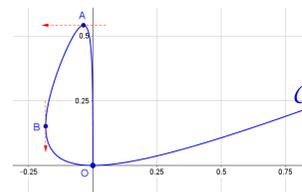
$\forall t > 0, \frac{x(t) - x(0)}{t - 0} = t \ln t \xrightarrow{(t \rightarrow 0)} 0$

La fonction x est donc dérivable en 0 et $x'(0) = 0$.

$\forall t > 0, \frac{y(t) - y(0)}{t - 0} = (\ln t)^2 \xrightarrow{(t \rightarrow 0)} +\infty$

La fonction y n'est donc pas dérivable en 0.

t	0	e^{-2}	$e^{-1/2}$	1	$+\infty$
$x'(t)$	0	-	-	0	+
$x(t)$	0	$-2e^{-4}$	$-\frac{1}{2e}$	0	$+\infty$
$y(t)$	0	$4e^{-2}$	$\frac{1}{4\sqrt{e}}$	0	$+\infty$
$y'(t)$	+	0	-	-	0



$A = M(e^{-2})$ et $B = M(e^{-1/2})$. Donc

$A(-2e^{-4}, 4e^{-2})$ et $B(-\frac{1}{2e}, \frac{1}{4\sqrt{e}})$

4. $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty$.

Donc la courbe \mathcal{C} présente une branche infinie en $+\infty$.

$\forall t > 1, \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{t(\ln t)^2}{t^2 \ln t} = \frac{\ln t}{t} \xrightarrow{(t \rightarrow +\infty)} 0$

Par conséquent la courbe paramétrée \mathcal{C} présente au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction horizontale $(O; \vec{i})$.

Exercice 4

Soit $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 .

On pose $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 2, 3)$ et $F = \text{Vect}(u, v)$.

1. • On applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

On pose $g_1 = u = (1, 1, 1)$ et $g_2 = v - \frac{\langle v | g_1 \rangle}{\|g_1\|^2} g_1 = v - \frac{6}{3} u = v - 2u = (-1, 0, 1)$.

Alors (g_1, g_2) est une base orthogonale de F .

En prenant $\varepsilon_1 = \frac{1}{\|g_1\|} g_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ et $\varepsilon_2 = \frac{1}{\|g_2\|} g_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$,

on obtient $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ comme base orthonormale du plan vectoriel F .

• Posons $\varepsilon_3 = \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} g_1 \wedge g_2$. Alors ε_3 a pour coordonnées dans la base \mathcal{B}_0 ,

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $\varepsilon_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$ et la famille $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base orthonormale directe de \mathbb{R}^3 .

2. Soit p la projection orthogonale sur F .

3. On a représenté ci-dessous la courbe \mathcal{C} .

(a) • **1ère méthode** utilisant une base orthonormale de F .

On sait d'après le cours (thm8 - ch3) que

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, p(x) = \langle x | \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 + \langle x | \varepsilon_2 \rangle \varepsilon_2 = \frac{1}{3} \langle x | g_1 \rangle g_1 + \frac{1}{2} \langle x | g_2 \rangle g_2$$

$$\text{D'où } \begin{cases} p(e_1) = \frac{1}{3}g_1 - \frac{1}{2}g_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\right) \\ p(e_2) = \frac{1}{3}g_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \\ p(e_3) = \frac{1}{3}g_1 + \frac{1}{2}g_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right) \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(p) = \begin{pmatrix} 5/6 & 1/3 & -1/6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/6 & 1/3 & 5/6 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

• **2ème méthode** utilisant la droite vectorielle $F^\perp = \text{Vect}(\varepsilon_3)$.

On désigne par p_{F^\perp} la projection orthogonale sur F^\perp .

On sait que $\mathbb{R}^3 = F \oplus F^\perp$ d'où $\forall x \in \mathbb{R}^3, x = p(x) + p_{F^\perp}(x)$.

Donc $p = \text{id}_{\mathbb{R}^3} - p_{F^\perp}$ puis en passant aux matrices dans la base canonique \mathcal{B}_0 , $A = I_3 - \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(p_{F^\perp})$

Or $\forall x \in \mathbb{R}^3, p_{F^\perp}(x) = \langle x | \varepsilon_3 \rangle \varepsilon_3 = \frac{1}{6} \langle x | g_3 \rangle g_3$ où $g_3 = (1, -2, 1)$.

$$\text{Donc } \begin{cases} p_{F^\perp}(e_1) = \frac{1}{6} g_3 \\ p_{F^\perp}(e_2) = -\frac{1}{3} g_3 \\ p_{F^\perp}(e_3) = \frac{1}{6} g_3 \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } A = I_3 - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

• **3ème méthode** utilisant les formules de changement de base.

Posons $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(p)$. Puisque $p(\varepsilon_1) = \varepsilon_1, p(\varepsilon_2) = \varepsilon_2$ et $p(\varepsilon_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$,

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On sait que $A' = P^{-1}AP$ où P désigne la matrice de passage de la base canonique \mathcal{B}_0 vers la base \mathcal{B}' .

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Comme \mathcal{B}_0 et \mathcal{B}' sont des bases orthonormales de \mathbb{R}^3 , la matrice P est orthogonale : $P \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et $P^{-1} = {}^t P$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } A' = P^{-1}AP &\implies A = PA'P^{-1} \\ &= (PA') {}^t P \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} {}^t P \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cette méthode n'est envisageable que si l'on dispose d'un logiciel de calcul matriciel.

(b) La distance du vecteur e_1 au sous-espace F est :

$$d(e_1, F) = \|e_1 - p(e_1)\| = \left\| \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right) \right\| = \frac{1}{6} \|(1, -2, 1)\| = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

3. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à F .

(a) D'après le cours (prop5 - ch4), $s = 2p - \text{id}_{\mathbb{R}^3}$.

(b) $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(s) = 2\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(p) - \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}) = 2A - I_3$.

$$\text{D'où } B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(c) $s(\varepsilon_1) = \varepsilon_1, s(\varepsilon_2) = \varepsilon_2$, et $s(\varepsilon_3) = -\varepsilon_3$.

Donc la matrice de s dans la base \mathcal{B}' est diagonale. On la note D : $D = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(s) = \text{diag}(1, 1, -1)$. On désigne par P la matrice de passage de la base canonique \mathcal{B}_0 vers la base \mathcal{B}' . D'après les formules de changement de base, $D = P^{-1}BP$ d'où $B = PDP^{-1}$. Or, comme \mathcal{B}_0 et \mathcal{B}' sont des bases orthonormales de \mathbb{R}^3 , la matrice P est orthogonale et $P^{-1} = {}^t P$.

Ainsi $B = PD^tP$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

4. Soit $k \in \mathbb{R}$. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} k+2 & 2 & -1 \\ 2 & k-1 & 2 \\ -1 & 2 & k+2 \end{pmatrix}$.

(a) $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} + kI_3 = 3B + kI_3.$

(b)
$$\begin{aligned} M &= 3(PD^tP) + k(P^tP) \\ &= P(3D)^tP + P(kI_3)^tP \\ &= (P3D + PkI_3)^tP \\ &= P(3D + kI_3)^tP \\ &= P\Delta^tP \end{aligned}$$

où $\Delta = 3D + kI_3 = \begin{pmatrix} 3+k & 0 & 0 \\ 0 & 3+k & 0 \\ 0 & 0 & -3+k \end{pmatrix}$

- (c) • M est semblable à la matrice diagonale $\Delta = \text{diag}(3+k, 3+k, k-3)$.
 Donc $\det(M) = \det(\Delta) = (3+k)^2(k-3)$.
 • M est inversible ssi $\det(M) \neq 0$ c.à.d. $k \neq -3$ et $k \neq 3$.

$$M \in GL_3(\mathbb{R}) \iff k \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$$