Exercice 1

1. **Vrai.** $\det(A)=\begin{vmatrix} a & c & c\\ c & a & b\\ c & b & a\end{vmatrix} \overset{C_3\leftarrow C_3-C_2}{=} \begin{vmatrix} a & c & 0\\ c & a & b-a\\ c & b & a-b\end{vmatrix} \overset{\text{par linéarité}}{=} (a-b)\begin{vmatrix} a & c & 0\\ c & a & -1\\ c & b & 1\end{vmatrix}$

   $\overset{L_2\leftarrow L_2+L_3}{=} (a-b)\begin{vmatrix} a & c & 0\\ 2c & a+b & 0\\ c & b & 1\end{vmatrix} = (a-b)\begin{vmatrix} a & c & 0\\ 2c & a+b & 0\\ c & b & \boxed{1}\end{vmatrix} = (a-b)\times 1\begin{vmatrix} a & c\\ 2c & a+b\end{vmatrix}$

   $= (a-b)\left(a(a+b)-2cc\right) = (a-b)(a^2+ab-2c^2)$

2. **Faux.** La matrice $T=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure. Ses valeurs propres sont donc les coefficients situés sur sa diagonale, à savoir 0 (de multiplicité 2) et 2 (de multiplicité 1). Le sous-espace propre associé à la valeur propre zéro est aussi le noyau de la matrice T : $\mathrm{Ker}(T)=\{U\in\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})\ \mid\ TU=\mathbb{O}_{3,1}\}$. Or la matrice T est clairement de rang égal à 2 et d'après le *théorème du rang* : $\dim(\mathrm{Ker}\,T)+\mathrm{rg}(T)=\dim(\mathbb{R}^3)$. Par conséquent $\dim(\mathrm{Ker}\,T)=3-2=1$.

   La dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre zéro, n'est pas égale à l'ordre de multiplicité de zéro en tant que racine du polynôme caractéristique de T. Ainsi T n'est pas diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

3. **Faux.** La matrice identité I_2 est diagonale donc diagonalisable. Son polynôme caractéristique est $(1-X)^2$. Il est scindé mais admet une seule racine qui est double.

4. **Vrai**. On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. On pose $\overrightarrow{u}=(1,1,1,\ldots,1)$ et $\overrightarrow{w}=(\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\ldots,\sqrt{n})$.

   Alors d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|\langle\overrightarrow{u}\mid\overrightarrow{w}\rangle|\leqslant\|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{w}\|$

   avec $\begin{cases}\langle\overrightarrow{u}\mid\overrightarrow{w}\rangle=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\\ \|\overrightarrow{u}\|=\sqrt{\langle\overrightarrow{u}\mid\overrightarrow{u}\rangle}=\sqrt{n}\\ \|\overrightarrow{w}\|=\sqrt{1+2+3+\cdots n}=\sqrt{\dfrac{n(n+1)}{2}}\end{cases}$

   Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\leqslant\sqrt{n}\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}=n\sqrt{\frac{n+1}{2}}$

Exercice 2 Soit $q\in\mathbb{R}$ tel que $0<q<1$.

1. La fonction f étant paire, nous avons $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ b_n=0$.

2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\quad a_n=\dfrac{2\left(\frac{\sin(\pi q+\pi n)}{2q+2n}+\frac{\sin(\pi q-\pi n)}{2q-2n}\right)}{\pi}$

   Or $\forall x\in\mathbb{R},\ \sin(x+\pi n)=\sin(x-\pi n)=(-1)^n\sin x$. Donc en prenant $x=\pi q$,

$$a_n=\frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^n\sin(\pi q)}{2q+2n}+\frac{(-1)^n\sin(\pi q)}{2q-2n}\right)=\frac{2(-1)^n\sin(\pi q)}{2\pi}\left(\frac{1}{q+n}+\frac{1}{q-n}\right)$$
$$=\frac{(-1)^n\sin(\pi q)}{\pi}\left(\frac{(q-n)+(q+n)}{(q+n)(q-n)}\right)=\frac{(-1)^n\sin(\pi q)}{\pi}\left(\frac{2q}{q^2-n^2}\right)$$

   Ainsi $\boxed{a_n=\dfrac{-2\,q\,\sin(\pi q)(-1)^n}{\pi(n^2-q^2)}}$

3. (a) La fonction f est 2π-périodique. Sa restriction au segment $[-\pi\,,\,\pi]$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.
   De plus f est continue en π car $\displaystyle\lim_{t\to\pi^-}f(t)=\lim_{t\to\pi^+}f(t)=f(\pi)=\cos(q\,\pi)$.
   Par conséquent f est continue sur $\mathbb{R}$ et le corollaire du *théorème de Dirichlet* assure que f est développable en série de Fourier et que pour tout réel t,

$$\begin{aligned} f(t) &= S(f)(t)\\ &= a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt)\right]\\ &= \frac{\sin(\pi q)}{\pi q}-\frac{2\,q\,\sin(\pi q)}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-q^2}\cos(nt)\end{aligned}$$

   (b) En remplaçant t par π dans l'égalité ci-dessus, on obtient :

   $f(\pi)=\dfrac{\sin(\pi q)}{\pi q}-\dfrac{2\,q\,\sin(\pi q)}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-q^2}\cos(n\pi)$

   c'est-à-dire $\quad\cos(q\pi)=\dfrac{\sin(\pi q)}{\pi q}-\dfrac{2\,q\,\sin(\pi q)}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2-q^2}$

   et enfin $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2-q^2}=-\left(\cos(q\pi)-\frac{\sin(\pi q)}{\pi q}\right)\frac{\pi}{2\,q\,\sin(\pi q)}$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2-q^2}=\frac{1}{2\,q}\left(\frac{1}{q}-\frac{\pi\,\cos(q\pi)}{\sin(q\pi)}\right)}$$

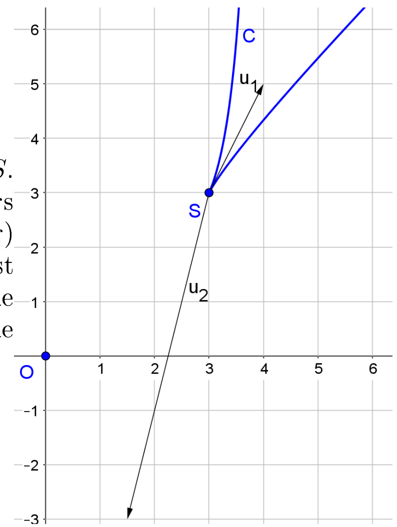
Exercice 3 $\begin{cases} x(t) &= t-1+\dfrac{4}{t} \\ y(t) &= t+\dfrac{1}{t-1} \end{cases}$ avec $t\in]1\,,+\infty[$.

1. - **Au voisinage de** 1. $\lim\limits_{t\to 1^+} x(t)=1-1+4=4$ et $\lim\limits_{t\to 1^+} y(t)=+\infty$.
     Par conséquent la droite $\boxed{d_1 \text{ d'équation } x=4}$ est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}$.
   - **Au voisinage de** $+\infty$. $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)=+\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)=+\infty$.
     Donc la courbe $\mathscr{C}$ présente une branche infinie en $+\infty$.
     $x(t) \underset{(t\to+\infty)}{\sim} t$ et $y(t) \underset{(t\to+\infty)}{\sim} t$.
     D'où $\dfrac{y(t)}{x(t)} \underset{(t\to+\infty)}{\sim} \dfrac{t}{t}=1$.
     De plus $\forall t>1,\ y(t)-1\times x(t)=\dfrac{1}{t-1}+1-\dfrac{4}{t} \underset{(t\to+\infty)}{\longrightarrow} 1$
     Par conséquent la droite $\boxed{d_2 \text{ d'équation } y=x+1}$ est asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}$.

2. On rappelle que le point M de paramètre t est un point stationnaire de $\mathscr{C}$ ssi $x'(t)=0$ et $y'(t)=0$.
   Les fonctions rationnelles x et y sont dérivables sur $]1\,,+\infty[$ et pour tout $t>1$,
   $$\begin{cases} x'(t) &= 1-\dfrac{4}{t^2} \\ y'(t) &= 1-\dfrac{1}{(t-1)^2} \end{cases}$$
   Donc $M(t)$ est un point stationnaire ssi $1=\dfrac{4}{t^2}$ et $1=\dfrac{1}{(t-1)^2}$
   c.à.d $t^2=4$ et $(t-1)^2=1$ c.à.d $t=2$.
   Ainsi $\boxed{\text{le point } S \text{ de paramètre 2, et de coordonnées } (3\,,3)}$ est le seul point stationnaire de $\mathscr{C}$.

3. On pose pour tout réel $t>1$, $f(t)=(x(t)\,,y(t))$.
   (a) On calcule les développements limités à l'ordre 3 au voisinage de 2 de chacune des fonctions coordonnées x et y, ce qui revient à calculer les développements limités à l'ordre 3 au voisinage de 0 des fonctions $h\mapsto x(2+h)$ et $h\mapsto y(2+h)$. Pour tout réel $h\in]-1\,,1[$,
   $$\begin{cases} x(2+h)=1+h+\dfrac{4}{2+h}=1+h+\dfrac{2}{1+(h/2)} \\ y(2+h)=2+h+\dfrac{1}{1+h} \end{cases}$$
   Or pour tout réel u voisin de 0, $\dfrac{1}{1+u}=1-u+u^2-u^3+o(u^3)$.
   Donc par composition,
   $$\begin{cases} x(2+h)=1+h+2\left(1-\dfrac{h}{2}+\dfrac{h^2}{4}-\dfrac{h^3}{8}+o(h)\right)=3+\dfrac{h^2}{2}-\dfrac{h^3}{4}+o(h^3) \\ y(2+h)=2+h+1-h+h^2-h^3+o(h^3)=3+h^2-h^3+o(h^3) \end{cases}$$
   On en déduit qu'au voisinage de 2,
   $$\begin{cases} x(t) &= 3+\dfrac{(t-2)^2}{2}-\dfrac{(t-2)^3}{4}+o((t-2)^3) \\ y(t) &= 3+(t-2)^2-(t-2)^3+o((t-2)^3) \end{cases}$$
   Le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 2 de la fonction f est donné par :
   $$\boxed{f(t)=f(2)+\frac{(t-2)^2}{2!}\overrightarrow{u_1}+\frac{(t-2)^3}{3!}\overrightarrow{u_2}+(t-2)^3\,\varepsilon(t)}$$
   avec $\overrightarrow{u_1}=(1\,,2)$, $\overrightarrow{u_2}=\left(-\dfrac{3}{2}\,,-6\right)$ et $\lim\limits_{t\to 2}\varepsilon(t)=(0,0)$.

   (b) $\overrightarrow{u_1}$ est un vecteur tangent à $\mathscr{C}$ en S. En reprenant les notations du cours (ch6 II.4), nous avons ici $p=2$ (pair) et $q=3$ (impair). Le point S est donc un point de rebroussement de première espèce : la courbe passe de part et d'autre de sa tangente en S.



Exercice 4

1. (a)
   - ${}^tB = {}^t\left({}^tAA\right) = ({}^tA)\,{}^t\left({}^tA\right) = {}^tAA = B$.
     Donc B est une matrice symétrique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
   - Soit $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

   $$\begin{aligned}\langle BX \mid X\rangle &= {}^t(BX)\,X = {}^tX\,{}^tB\,X = {}^tX\,B\,X = {}^tX\,({}^tAA)\,X \\ &= ({}^tX\,{}^tA)\,(A\,X) = {}^t(AX)\,(AX) = \langle AX \mid AX\rangle = \|AX\|^2\end{aligned}$$

   (b) Puisque B est une matrice symétrique à coefficients réels, d'après le *théorème spectral*, ses valeurs propres sont réelles. Soit λ une valeur propre de B et X un vecteur propre associé. Alors par définition, $X \neq \mathbb{0}_{n,1}$ et $BX = \lambda\,X$
   D'après la question précédente,

   $$\|AX\|^2 = \langle BX \mid X\rangle = \langle \lambda\,X \mid X\rangle = \lambda\,\langle X \mid X\rangle = \lambda\,\|X\|^2$$

   Or $\|X\|^2 \neq 0$ car $X \neq \mathbb{0}_{n,1}$.
   Donc $\lambda = \dfrac{\|AX\|^2}{\|X\|^2}$ est un réel positif ou nul.

2. On suppose que $\exists\, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\,,\,1\}$; $A^k = {}^tA$.

   (a)
   - $A = {}^t({}^tA) = {}^t(A^k) = \left({}^tA\right)^k$.
   - De plus $B = {}^tAA = A^k\,A = A^{k+1}$. On en déduit que

   $$B^k = \left(A^{k+1}\right)^k = \left(A^k\right)^{k+1} = \left({}^tA\right)^{k+1} = {}^tA\,\left({}^tA\right)^k = {}^tAA = B$$

   (b) $X^k - X$ est un polynôme annulateur de la matrice B. Donc les valeurs propres de B, qui sont des réels positifs ou nuls, sont aussi des racines du polynôme $X^k - X = X(X^{k-1} - 1)$ sachant que $k \geqslant 2$.
   Or les racines réelles positives ou nulles de $X(X^{k-1} - 1)$ sont 0 et 1.
   Par conséquent $\boxed{\text{les valeurs propres possibles pour } B \text{ sont 0 et 1.}}$

   (c) $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique réelle. Donc, d'après le *théorème spectral*, il existe une matrice orthogonale $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $B = P\,D\,P^{-1} = P\,D\,{}^tP$.

   Posons $D = \mathrm{diag}(\lambda_1,\, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.
   Alors les λ_k sont les valeurs propres de B.
   Par conséquent $\forall\, k \in [\![1\,,\,n]\!]$, $\lambda_k \in \{0\,,\,1\}$. D'où $\forall\, k \in [\![1\,,\,n]\!]$, $\lambda_k^2 = \lambda_k$

   $$\text{puis } D^2 = \mathrm{diag}\left(\lambda_1^2,\, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2\right) = \mathrm{diag}(\lambda_1,\, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = D$$

   $$\text{Enfin} \quad B^2 = (P\,D\,P^{-1})^2 = P\,D^2\,P^{-1} = P\,D\,P^{-1} = B$$

3. (a)
   - Soit $X \in \mathrm{Ker}(B)$. Alors $BX = \mathbb{0}_{n,1}$. Donc, d'après 1.(a),

   $$\|AX\|^2 = \langle BX \mid X\rangle = \langle \mathbb{0}_{n,1} \mid X\rangle = 0$$

     D'où $\|AX\| = 0$ puis $AX = \mathbb{0}_{n,1}$. Ainsi $X \in \mathrm{Ker}(A)$.

     On vient de prouver que $\boxed{\mathrm{Ker}(B) \subset \mathrm{Ker}(A)}$.
   - Réciproquement, soit $X \in \mathrm{Ker}(A)$. Alors $AX = \mathbb{0}_{n,1}$.

   $$\text{Donc } BX = ({}^tAA)X = {}^tA(AX) = {}^tA\,\mathbb{0}_{n,1} = \mathbb{0}_{n,1}$$

     Ainsi $X \in \mathrm{Ker}(B)$.
     On vient de prouver que $\boxed{\mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Ker}(B)}$.
     Finalement $\mathrm{Ker}(B) = \mathrm{Ker}(A)$.

   (b)
   - Soit $Y \in \mathrm{Im}(B)$. Alors $\exists\, X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; $Y = BX$.

     D'où $Y = BX = ({}^tAA)X = A^k\,A\,A = A(A^k\,X) = AZ$
     en posant $Z = A^kX \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. . Donc $y \in \mathrm{Im}(A)$. Ainsi $\mathrm{Im}(B) \subset \mathrm{Im}(A)$.
   - $\mathrm{Im}(B)$ et $\mathrm{Im}(A)$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie.
     Pour montrer que $\mathrm{Im}(B) = \mathrm{Im}(A)$, il suffit de prouver que $\mathrm{Im}(B)$ et $\mathrm{Im}(A)$ ont la même dimension.
     D'après le *théorème du rang* (dans sa version matricielle qui consiste à «confondre» une application linéaire avec la matrice qui lui est canoniquement associée) :
     $\dim(\mathbb{R}^n) = \dim(\mathrm{Ker}A) + \dim(\mathrm{Im}A)$
     et $\dim(\mathbb{R}^n) = \dim(\mathrm{Ker}B) + \dim(\mathrm{Im}B)$
     d'où $\dim(\mathrm{Im}A) = n - \dim(\mathrm{Ker}A)$ et $\dim(\mathrm{Im}B) = n - \dim(\mathrm{Ker}B)$

     Or on a vu en 3.(a) que $\mathrm{Ker}(B) = \mathrm{Ker}(A)$.
     Donc $\dim(\mathrm{Im}A) = \dim(\mathrm{Im}B)$.

   (c) Soit $X \in \mathrm{Im}(A)$. Alors $X \in \mathrm{Im}(B)$.
   Par conséquent $\exists\, Z \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; $X = BZ$. D'où $BX = B^2Z = BZ = X$.
   Ainsi, d'après 1.(a), $\|AX\|^2 = \langle BX \mid X\rangle = \langle X \mid X\rangle = \|X\|^2$.
   Comme $\|AX\|$ et $\|X\|$ sont des réels positifs, $\|AX\| = \|X\|$.