

**Exercice 1**

$$1. \det(M(x)) = \begin{vmatrix} 0 & x & 0 \\ 3 & x & 2 \\ 1 & 6 & x \end{vmatrix} = -x \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & x \end{vmatrix} = -x(3x - 2)$$

La matrice  $M(x)$  est inversible si, et seulement si,  $\det(M(x)) \neq 0$

c'est-à-dire  $x \neq 0$  et  $x \neq \frac{2}{3}$

2. La matrice  $A$  étant triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont les coefficients de sa diagonale :  $A$  admet deux valeurs propres : 1 et 2. Puisque 2 est de multiplicité 1, le sous-espace propre  $E_2(A)$  associé à la valeur propre 2, est de dimension 1.

Donc  $A$  est diagonalisable ssi  $\dim(E_1(A)) + \dim(E_2(A)) = 3$   
ssi  $\dim(E_1(A)) = 3 - 1 = 2$

Or par définition,  $E_1(A) = \text{Ker}(A - I_3)$  et d'après le théorème du rang dans sa version matricielle :  $\dim(\text{Ker}(A - I_3)) + \text{rg}(A - I_3) = \dim(\mathbb{R}^3)$   
d'où  $\text{rg}(A - I_3) = 3 - \dim(E_1(A))$

Donc  $A$  est diagonalisable ssi la matrice  $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  est de rang 1

c'est-à-dire  $b = 0$ .

3. Une réflexion  $s$  de  $\mathbb{R}^3$  est une symétrie orthogonale par rapport à un plan vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

Donc la matrice de  $s$  dans une base adaptée est la matrice diagonale  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Ainsi les valeurs propres de  $s$  sont  $1$  (de multiplicité 2) et  $-1$  (de multiplicité 1).

4. Notons  $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

L'énoncé nous fait admettre que  $B \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ .

On sait que  $\text{Tr}(B) = 1 + 2 \cos \theta$  d'où  $\cos \theta = \frac{1}{2}$

De plus  $\sin \theta$  est du signe de  $\det_{\mathcal{B}_0}(\vec{n}, e_1, u(e_1)) = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 < 0$

Donc  $\sin \theta = -\sqrt{1 - \cos^2(\theta)} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Ainsi  $\theta = -\frac{\pi}{3}$

**Exercice 2**

1. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit la fonction  $f_n$  sur  $[0, +\infty[$  par  $f_n(t) = \frac{\exp(-\frac{t}{n^2})}{1+t^2}$

Chaque fonction  $f_n$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .

- Soit  $t \in \mathbb{R}^+$ ,  $t$  fixé.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{t}{n^2} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = e^0 = 1$

D'où, par composition  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(-\frac{t}{n^2}\right) = 1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = \frac{1}{1+t^2}$

- La fonction  $f : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .

- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in \mathbb{R}^+$ . Alors  $-\frac{t}{n^2} \leq 0 \implies \exp\left(-\frac{t}{n^2}\right) \leq 1$

Donc  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, +\infty[, |f_n(t)| \leq \frac{1}{1+t^2}$

la fonction dominante  $f : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$  est positive et **intégrable** sur  $[0, +\infty[$ . En effet :

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan t]_0^x = \arctan x - \arctan(0) \xrightarrow{(x \rightarrow +\infty)} \frac{\pi}{2}$$

Le **théorème de convergence dominée** permet de conclure que les fonctions  $f_n$  sont intégrables sur  $[0, +\infty[$  et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}$$

2. On pose pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+n^4 x^2} dx$

(a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n$  fixé.

La fonction  $g_n : x \mapsto \frac{e^{-x}}{1+n^4 x^2}$  est continue et positive sur  $[0, +\infty[$ .

- Première méthode avec le critère de comparaison.

$$x \geq 0 \implies 1 + n^4 x^2 \geq 1 \implies 0 < \frac{1}{1+n^4 x^2} \leq 1 \implies 0 < \frac{e^{-x}}{1+n^4 x^2} \leq e^{-x}$$

Donc  $\forall x \in \mathbb{R}^+, 0 < g_n(x) \leq e^{-x}$ . Or l'intégrale généralisée  $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$  est convergente car  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} -e^{-A} + 1 = 1$

Ainsi, par comparaison, l'intégrale généralisée  $\int_0^{+\infty} g_n(x) dx$  converge aussi.

• Deuxième méthode avec le critère de Riemann.

$$x^2 g_n(x) = \frac{x^2}{1 + n^4 x^2} e^{-x} \underset{(x \rightarrow +\infty)}{\sim} \frac{1}{n^4} e^{-x}.$$

D'où  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 g_n(x) = 0$ . Donc, d'après le **critère de Riemann** ( $2 > 1$ ),

l'intégrale généralisée  $I_n = \int_0^{+\infty} g_n(x) dx$  est convergente.

(b) Soit  $A$  un réel positif. On procède au changement de variable affine  $t = n^2 x$ , dans l'intégrale définie  $\int_0^A \frac{e^{-x}}{1 + n^4 x^2} dx$ .

Alors  $x = \frac{t}{n^2}$  et  $dx = \frac{1}{n^2} dt$ . D'où

$$\int_0^A \frac{e^{-x}}{1 + (n^2 x)^2} dx = \int_0^{n^2 A} \frac{\exp\left(-\frac{t}{n^2}\right)}{1 + t^2} \frac{1}{n^2} dt = \frac{1}{n^2} \int_0^{n^2 A} \frac{\exp\left(-\frac{t}{n^2}\right)}{1 + t^2} dt$$

En faisant tendre  $A$  vers  $+\infty$ , on obtient l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1 + (n^2 x)^2} dx = \frac{1}{n^2} \int_0^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{t}{n^2}\right)}{1 + t^2} dt$$

$$\text{Ainsi } I_n = \frac{1}{n^2} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$$

(c)  $\sum I_n$  est une série à termes positifs. On rappelle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \frac{\pi}{2}. \quad \text{On en déduit que } I_n \underset{(n \rightarrow +\infty)}{\sim} \frac{\pi}{2} \frac{1}{n^2}.$$

Donc, d'après le **critère d'équivalence**, les séries  $\sum I_n$  et  $\sum \frac{\pi}{2} \frac{1}{n^2}$  sont de même nature.

Or la série  $\sum \frac{\pi}{2} \frac{1}{n^2}$  est de même nature que la **série de Riemann**  $\sum \frac{1}{n^2}$  qui est convergente (car  $2 > 1$ ).

Par conséquent la série  $\sum I_n$  est convergente.

**Exercice 3**

$I = [0, +\infty[$ . On note  $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel constitué des fonctions  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continues sur  $I$  telles que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t)^2 dt$  converge.

**Partie A : un produit scalaire sur  $E$**

1. Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . On a  $(|a| - |b|)^2 \geq 0$  d'où  $|a|^2 + |b|^2 \geq 2|a||b|$ .

Or  $|a|^2 = a^2$  et  $|a||b| = |ab|$ . Ainsi  $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ .

2. Soit  $(f, g) \in E^2$ . Alors  $f$  et  $g$  sont continues sur  $I$ .

Donc la fonction  $fg$  est également continue sur  $I$ .

D'après l'inégalité précédente, on a  $\forall t \in I, |f(t)g(t)| \leq \frac{1}{2}(f(t)^2 + g(t)^2)$ .

Or les fonctions  $f^2$  et  $g^2$  sont continues et intégrables sur  $I$ .

Comme la fonction  $t \mapsto \frac{1}{2}(f(t)^2 + g(t)^2)$  est positive, continue et intégrable sur  $I$ , la fonction produit  $fg$  est intégrable sur  $I$ .

Ainsi le produit de deux éléments de  $E$  est intégrable sur  $I$ .

3. Soit  $f, g$  et  $h$  trois fonctions de  $E$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

• Existence. Le réel  $\varphi(f, g)$  est bien défini car on a vu que la fonction  $fg$  était intégrable sur  $I$ .

• Linéarité par rapport à la première variable.

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda f + g, h) &= \int_I (\lambda f + g)(t) h(t) dt = \int_I (\lambda f(t) h(t) + g(t) h(t)) dt \\ &= \lambda \int_I f(t) h(t) dt + \int_I g(t) h(t) dt \text{ par linéarité de l'intégrale.} \end{aligned}$$

Ainsi  $\varphi(\lambda f + g, h) = \lambda \varphi(f, h) + \varphi(g, h)$

• Symétrie.  $\varphi(g, f) = \int_I g(t) f(t) dt = \int_I f(t) g(t) dt = \varphi(f, g)$ .

• Positivité. Par définition de  $E$ , la fonction  $f^2$  est continue, positive et intégrable sur  $I$ .

Donc par **positivité de l'intégrale**,  $\int_I f(t)^2 dt \geq 0$ . Ainsi  $\varphi(f, f) \geq 0$ .

- Définie positivité. On suppose que  $\varphi(f, f) = 0$ . Alors  $\int_I f(t)^2 dt = 0$ .

Or la fonction  $t \mapsto f(t)^2$  est *continue* et positive sur l'intervalle  $I = [0, +\infty[$ .

Donc d'après le **théorème de positivité stricte**,  $\forall t \in I, f(t)^2 = 0$

Ainsi  $f = 0_E$ .

Finalement  $\varphi$  définit bien un produit scalaire sur  $E$

### Partie B : inégalité de Cauchy Schwarz

Soit  $\alpha$  un nombre réel strictement positif.

1. Soit  $x$  un réel positif.

$$\int_0^x e^{-2\alpha t} dt = \left[ -\frac{1}{2\alpha} e^{-2\alpha t} \right]_{t=0}^{t=x} = -\frac{1}{2\alpha} (e^{-2\alpha x} - 1)$$

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2\alpha x} = 0$  car  $-2\alpha < 0$ .

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-2\alpha t} dt = -\frac{1}{2\alpha} (0 - 1) = \frac{1}{2\alpha}$$

Ainsi l'intégrale généralisée  $\int_0^{+\infty} e^{-2\alpha t} dt$  est convergente et

$$\int_0^{+\infty} e^{-2\alpha t} dt = \frac{1}{2\alpha}$$

2. Soit  $f$  une fonction quelconque de  $E$ . On considère la fonction  $g : t \mapsto e^{-\alpha t}$ .

Alors la fonction  $g$  est continue sur  $I$  et d'après la question précédente, l'intégrale généralisée  $\int_I g(t)^2 dt$  est convergente. Donc  $g \in E$ .

D'après l'**inégalité de Cauchy-Schwarz**,  $|\langle f | g \rangle| \leq \|f\| \times \|g\|$

$$\text{Avec } \|f\| = \sqrt{\langle f | f \rangle} = \left( \int_0^{+\infty} f(t)^2 dt \right)^{1/2}$$

$$\text{et } \|g\| = \left( \int_0^{+\infty} g(t)^2 dt \right)^{1/2} = \left( \int_0^{+\infty} e^{-2\alpha t} dt \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{2\alpha}}$$

$$\text{Ainsi } \int_0^{+\infty} f(t) e^{-\alpha t} dt \leq \left| \int_0^{+\infty} f(t) e^{-\alpha t} dt \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \left( \int_0^{+\infty} f(t)^2 dt \right)^{1/2}$$

### Partie C : orthonormalisation

On considère les fonctions  $f_1 : t \mapsto e^{-t}$  et  $f_2 : t \mapsto e^{-2t}$

1. Les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  sont continues sur  $I$ . De plus, on a vu à la première question de la partie B, que l'intégrale généralisée  $\int_0^{+\infty} e^{-2\alpha t} dt = \int_0^{+\infty} (e^{-\alpha t})^2 dt$  était convergente pour tout réel  $\alpha > 0$ . En particulier pour  $\alpha = 1$  et  $\alpha = 2$ .  
Donc  $f_1$  et  $f_2$  sont des éléments de  $E$ .
2. La famille  $(f_1, f_2)$  est libre. Donc  $F = \text{Vect}(f_1, f_2)$  est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de  $E$ .

On applique l'algorithme d'**orthonormalisation de Gram-Schmidt**.

On construit d'abord une *base orthogonale*  $(g_1, g_2)$  de  $F$  en posant  $g_1 = f_1$  et

$$g_2 = f_2 - \frac{\langle f_2 | g_1 \rangle}{\langle g_1 | g_1 \rangle} \cdot g_1 = f_2 - \frac{\langle f_2 | f_1 \rangle}{\langle f_1 | f_1 \rangle} \cdot f_1$$

$$\text{Or } \langle f_1 | f_1 \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \langle f_2 | f_1 \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-3t} dt = \frac{1}{3}$$

Donc  $g_2 = f_2 - \frac{2}{3} f_1$ . Il reste à normaliser ces deux vecteurs  $g_1$  et  $g_2$ .

$$\text{On sait déjà que } \|g_1\| = \sqrt{\langle g_1 | g_1 \rangle} = \sqrt{\langle f_1 | f_1 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{De plus } \|g_2\|^2 = \int_0^{+\infty} \left( e^{-2t} - \frac{2}{3} e^{-t} \right)^2 dt = \int_0^{+\infty} \left( e^{-4t} - \frac{4}{3} e^{-3t} + \frac{4}{9} e^{-4t} \right) dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-4t} dt - \frac{4}{3} \int_0^{+\infty} e^{-3t} dt + \frac{4}{9} \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt = \frac{1}{4} - \frac{4}{9} + \frac{4}{18} = \frac{1}{36}$$

$$\text{D'où } \|g_2\| = \frac{1}{6}$$

$$\text{On pose enfin } \varepsilon_1 = \frac{1}{\|g_1\|} g_1 = \sqrt{2} g_1 \quad \text{et} \quad g_2 = \frac{1}{\|g_2\|} g_2 = 6 g_2$$

$$\text{Ainsi } \varepsilon_1 : t \mapsto \sqrt{2} e^{-t} \quad \text{et} \quad \varepsilon_2 : t \mapsto 6e^{-2t} - 4e^{-t}$$

3. • Montrons d'abord que  $g \in E$ . Comme  $g$  est continue sur  $I$ , on montre que  $g$  est de carré intégrable sur  $I$ .

Pour tout réel  $t > 0$ ,  $t^2 g(t)^2 = t^4 e^{-2t} = \frac{1}{\left(\frac{e^t}{t^2}\right)^2}$

Or par croissance comparée,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^2} = +\infty$  d'où  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^t}{t^2}\right)^2 = +\infty$

puis  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 g(t)^2 = 0$ . Le critère de Riemann permet de conclure que l'intégrale

généralisée  $\int_0^{+\infty} g(t)^2 dt$  converge.

La question posée revient à minimiser  $\|g - h\|^2$  lorsque  $h$  décrit le sous-espace  $F$ . On sait, d'après le théorème de projection orthogonale, que ce minimum est atteint en un unique point  $h$  de  $F$ , qui est le projeté orthogonal de  $g$  sur  $F$ .

$$\min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (te^{-t} - ae^{-t} - be^{-2t})^2 dt = d(g, F)^2 = \|g - p_F(g)\|^2$$

On cherche donc à exprimer  $h = p_F(g)$  comme combinaison linéaire de  $f_1$  et  $f_2$ .

• Première méthode utilisant une base orthonormale  $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  de  $F$ .

$$p_F(g) = \langle g | \varepsilon_1 \rangle \cdot \varepsilon_1 + \langle g | \varepsilon_2 \rangle \cdot \varepsilon_2$$

$$\text{avec } \langle g | \varepsilon_1 \rangle = \int_0^{+\infty} te^{-t} \sqrt{2} e^{-t} dt = \sqrt{2} \int_0^{+\infty} te^{-2t} dt = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \langle g | \varepsilon_2 \rangle &= \int_0^{+\infty} te^{-t} (6e^{-2t} - 4e^{-t}) dt = 6 \int_0^{+\infty} te^{-3t} dt - 4 \int_0^{+\infty} te^{-2t} dt \\ &= \frac{6}{9} - \frac{4}{4} = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } p_F(g) = \frac{\sqrt{2}}{4} \varepsilon_1 - \frac{1}{3} \varepsilon_2 = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{2} f_1) - \frac{1}{3} (6f_2 - 4f_1) = \frac{1}{2} f_1 - 2f_2 + \frac{4}{3} f_1$$

Ainsi  $p_F(g) = \frac{11}{6} f_1 - 2 f_2$

• Deuxième méthode utilisant une caractérisation du projeté orthogonal d'un vecteur.

Soit  $h$  un élément de  $F$ . Alors  $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 ; h = a \cdot f_1 + b \cdot f_2$ .

$$\begin{aligned} h = p_F(g) &\iff (g - h) \in F^\perp \iff \begin{cases} (g - h) \perp f_1 \\ (g - h) \perp f_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \langle g - h | f_1 \rangle = 0 \\ \langle g - h | f_2 \rangle = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \langle h | f_1 \rangle = \langle g | f_1 \rangle \\ \langle h | f_2 \rangle = \langle g | f_2 \rangle \end{cases} \iff \begin{cases} a \langle f_1 | f_1 \rangle + b \langle f_2 | f_1 \rangle = \langle g | f_1 \rangle \\ a \langle f_1 | f_2 \rangle + b \langle f_2 | f_2 \rangle = \langle g | f_2 \rangle \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Or on a vu que } \langle f_1 | f_1 \rangle = \frac{1}{2}, \quad \langle f_2 | f_1 \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-3t} dt = \frac{1}{3}, \quad \langle f_2 | f_2 \rangle = \frac{1}{4}$$

$$\text{et } \langle g | f_1 \rangle = \int_0^{+\infty} te^{-2t} dt = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}, \quad \langle g | f_2 \rangle = \int_0^{+\infty} te^{-3t} dt = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$\text{Donc } h = p_F(g) \iff \begin{cases} \frac{a}{2} + \frac{b}{3} = \frac{1}{4} \\ \frac{a}{3} + \frac{b}{4} = \frac{1}{9} \end{cases} \iff \begin{cases} 6a + 4b = 3 \\ 12a + 9b = 4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 6a = 3 - 4b \\ b = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{11}{6} \\ b = -2 \end{cases}$$