MT25 Printemps 2007

Corrigé de l'examen médian du 13 avril 2007

Correction de l'exercice 1.
Cet exercice est issu de l'exemple 1 page 383 de [LFA01].
On étudie la courbe paramétrique du plan définie par

$$x(t) = \frac{t^2}{(t^2-1)(2t-1)}, \tag{1a}$$
$$y(t) = \frac{t^3}{(t^2-1)(2t-1)}. \tag{1b}$$

(1) Les deux fonctions x et y sont C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1/2, 1\}$. On détermine les dérivées :

$$\boxed{x'(t) = \frac{-2t\left(t^3+t-1\right)}{\left(t^2-1\right)^2(2t-1)^2}} \tag{2a}$$
$$\boxed{y'(t) = \frac{-t^2\left(t^2+4t-3\right)}{\left(t^2-1\right)^2(2t-1)^2}} \tag{2b}$$

Puisque la fonction polynômiale $t \mapsto t^3+t-1$ n'admet qu'une seule racine réelle définie par

$$\alpha \approx 0.6823278038280193, \tag{3}$$

elle est positive sur $[\alpha, +\infty[$ et négative sur $]-\infty, \alpha]$. les deux racines de la fonction polynômiale $t \mapsto t^2+4t-3$ sont $\pm\sqrt{7}-2$. On en déduit donc le tableau de variation de x et y :

t	$-\infty$		$-\sqrt{7}-2$		-1		0		$1/2$		$\sqrt{7}-2$		α		1		$+\infty$
x	0	$\searrow$	a	$\searrow -\infty$	$\emptyset$	$+\infty \searrow$	0	$\nearrow +\infty$	$\emptyset$	$-\infty \nearrow$	b	$\nearrow$	M_1	$\searrow -\infty$	$\emptyset$	$+\infty \searrow$	0
y	$1/2$	$\searrow$	m	$\nearrow +\infty$	$\emptyset$	$-\infty \nearrow$	0	$\nearrow +\infty$	$\emptyset$	$-\infty \nearrow$	M_2	$\searrow$	c	$\searrow -\infty$	$\emptyset$	$+\infty \searrow$	$1/2$
x'		$-$	$-$	$-$	$\emptyset$	$-$	0	$+$	$\emptyset$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$\emptyset$	$-$	
y'		$-$	0	$+$	$\emptyset$	$+$	0	$+$	$\emptyset$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$\emptyset$	$-$	

TAB. 1. Tableau de variation de x et de y.

Compte tenu de (3), on a numériquement :

$$\begin{aligned} a &\approx -0.101888306193515 \\ b &\approx -2.453667249362040 \\ c &\approx -1.630070849141942 \\ m &\approx +0.473347732080674 \\ M_2 &\approx -1.584458843191785 \\ M_1 &\approx -2.388984942423365 \end{aligned}$$

Sur le tableau de variation, on constate qu'en $t = -\sqrt{7} - 2$, ou $t = \sqrt{7} - 2$ ou $t = \alpha$, la tangente à la courbe est parallèles soit à l'axe xx' soit à l'axe yy', puisqu'en ces points, seule une des deux composantes x' ou y' est nulle. En revanche, le point correspondant à $t = 0$ est stationnaire.

(2) On étudie donc maintenant le point correspondant à $t = 0$. Nous avons plusieurs méthodes :

– On utilise la proposition du cours 1.10 page 4 du chapitre 1. On s'arme de courage et on calcule les dérivées successives de x et de y. On trouve

$$x''(0) = 2, \quad y''(0) = 0, \quad x'''(0) = 12, \quad y'''(0) = 6.$$

Ainsi, en notant $F(t) = (x(t), y(t))$, en $t = 0$, F'' est non nulle et F'' et F''' sont linéairement indépendantes. Ainsi, avec les notations du cours,

$$p = 2, \quad q = 3$$

et

$$\boxed{\text{La tangente est parallèle à l'axe } xx'.} \tag{4}$$

$$\boxed{\text{Le point est un point de rebroussement de première espèce.}} \tag{5}$$

Cela est confirmé par la figure 1 page suivante, où la courbe est représentée au voisinage de $t = 0$.

– Mieux, on peut utiliser la fonction

$$m(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = t\frac{t^2 + 4t - 3}{t^3 + t - 1}, \tag{6}$$

en constatant aisément que sa limite vaut 0 en t tendant vers zéro. Ainsi, (4) découle de la proposition du cours 1.20 page 9 du chapitre 1. De plus, on se contente de calculer par exemple $x''(0) \neq 0$. Ainsi $p = 2$. Or, d'après (6), m s'annule en changeant de signe en $t = 0$. Ainsi, (5) provient simplement de la proposition du cours 1.21 page 10 du chapitre 1.

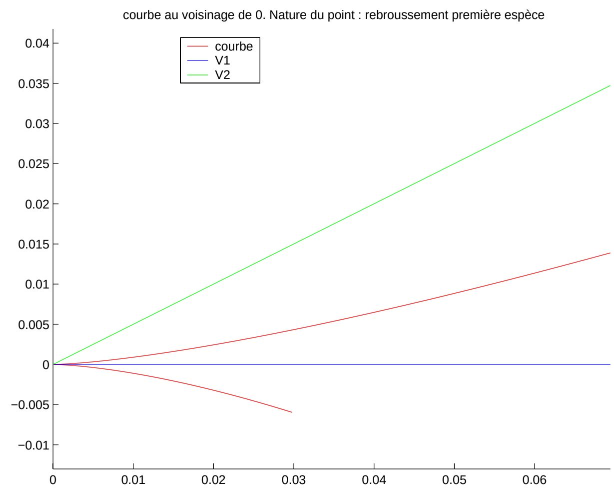


FIG. 1. La courbe au voisinage de $t = 0$.

– Encore plus rapidement, on pouvait aussi constater que

$$\frac{y(h)}{x(h)} = \frac{y(h) - y(0)}{x(h) - x(0)} = h. \tag{7}$$

Or en $t = t_0$, le coefficient directeur de la droite $(M(t_0)M(t_0 + h)$ égal à

$$\frac{y(t_0 + h) - y(t_0)}{x(t_0 + h) - x(t_0)}.$$

On en déduit donc (4). De plus, (7) nous montre que x et y sont de même signe quand t est positif et de signe contraire sinon. De plus, x est localement positif si h est positif. Autrement dit, le point $M(h)$ reste localement dans le quart de plan $(x \geq 0, y \geq 0)$ si $h \geq 0$ et reste localement dans le quart de plan $(x \geq 0, y \leq 0)$ si $h \geq 0$; on est donc bien dans le cas du rebroussement de première espèce (5).

(3) On montre successivement qu'en $t_0 \in \{-1, 1/2, 1\}$,

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} |x(t)| + |y(t)| = +\infty, \tag{8}$$

puis qu'en $t_0 = -1$,

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{y(t)}{x(t)} = -1,$$

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} y(t) + x(t) = \frac{1}{6},$$

qu'en $t_0 = 1/2$,

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} y(t) - \frac{1}{2}x(t) = -\frac{1}{6},$$

et qu'en $t_0 = 1$,

$$\lim_{\substack{t\to t_0\\ t\neq t_0}} \frac{y(t)}{x(t)} = 1,$$

$$\lim_{\substack{t\to t_0\\ t\neq t_0}} y(t) - x(t) = \frac{1}{2}.$$

D'après la définition 1.25 page 13 du cours, on en déduit que

$$\boxed{\text{La droite } y = -x + 1/6 \text{ est asymptote à la courbe quand } t \text{ tend vers } -1.} \tag{9}$$

$$\boxed{\text{La droite } y = x/2 - 1/6 \text{ est asymptote à la courbe quand } t \text{ tend vers } 1/2.} \tag{10}$$

$$\boxed{\text{La droite } y = x + 1/2 \text{ est asymptote à la courbe quand } t \text{ tend vers } 1.} \tag{11}$$

$$\tag{12}$$

Pour étudier la position de la courbe par rapport à ses asymptotes, on applique la remarque du cours 1.26 page 15 du chapitre 1. On pose respectivement $h = t+1$, $h = t-1/2$ et $h = t-1$ et on montre que

$$y(t) + x(t) = \frac{1}{6} - \frac{5}{36}h + o(h), \tag{13a}$$

$$y(t) - \frac{1}{2}x(t) = -\frac{1}{6} - \frac{8}{9}h + o(h), \tag{13b}$$

$$y(t) - x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}h + o(h), \tag{13c}$$

dont on déduit le signe et la position de la courbe par rapport à ses asymptotes. Par exemple, au voisinage de -1, (13a) implique

$$y(t) - \left(-x(t) - \frac{1}{6}\right) = -\frac{5}{36}h(1 + o(h)),$$

quantité qui est localement négative si $h > 0$ et localement positive si $h < 0$. Ainsi,

$$\boxed{\text{en } t \to -1, \text{ la courbe est au dessus de son asymptote si } t < -1 \text{ et au dessous si } t > -1.} \tag{14}$$

De même, on montre que

$$\boxed{\text{en } t \to 1/2, \text{ la courbe est au dessus de son asymptote si } t < 1/2 \text{ et au dessous si } t > 1/2.} \tag{15}$$

$$\boxed{\text{en } t \to 1, \text{ la courbe est au dessus de son asymptote si } t < 1 \text{ et au dessous si } t > 1.} \tag{16}$$

Voir respectivement les figures 3(a) page 7 et 3(c) page 7, 3(c) et 3(d), 3(b) et 3(d).

(4) D'après le tableau 1 page 2, en $t_0 = \pm\infty$, l'égalité (8) n'a pas lieu et on n'a donc pas de branches infinies. En revanche, puisque x et y admettent des limites en t_0, on peut étudier si la courbe admet une tangente en ce point. D'après (6) puisque

$$\lim_{t\to\pm\infty} m(t) = \frac{1}{2}, \tag{17}$$

la proposition du cours 1.20 page 9 du chapitre 1 implique

$$\boxed{\text{La tangente est à la courbe en } t_0 = \pm\infty \text{ admet pour équation } y = x/2 + 1/2.} \tag{18}$$

Pour étudier la position de la courbe par rapport à sa tangente, on peut appliquer la méthode de l'exercice 1.2 du TD 1 : on pose $u = 1/t$, qui tend vers $0^{\pm}$ quand t tend vers $\pm\infty$ et on fait un développement limité à l'ordre 2 de $x(1/u)$ et $y(1/u)$ pour u tendant vers zéro :

$$x\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}u^2 + o\left(u^2\right),$$
$$y\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}u + \frac{5}{8}u^2 + o\left(u^2\right).$$

On obtient donc les développements asymptotiques suivants en $t = \pm\infty$,

$$x(t) = \frac{1}{2t} + \frac{1}{4t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right),$$
$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4t} + \frac{5}{8t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

et par combinaisons linéaires, on obtient

$$y(t) = \frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2} + \frac{1}{t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

on en déduit que

$$y(t) - \frac{1}{2}x(t) - \frac{1}{2} = \frac{1}{t^2}\left(1 + o(1)\right),$$

dont on déduit que $y(t) - x(t)/2 - 1/2$ est localement positif. Ainsi

$$\boxed{\text{La courbe est localement au dessus de sa tangente en } t \to \pm\infty.} \tag{19}$$

Cela est confirmé par la figure 2 page suivante, où la courbe est représentée au voisinage de $t = \pm\infty$.

On retrouve aussi (18) et s'affranchir de la première partie du raisonnement.

On pourra faire tourner le script matlab fourni `medcor_exo1asym_MT25_P07.m`.

(5) On en déduit le tracé de la courbe.

On pourra faire tourner le script matlab fourni `medcor_exo1trac_MT25_P07.m`.

Voir figures 3 page 7 où la courbe est représentée partiellement et la figure 4 page 8 où la courbe est représentée en entier.

Correction de l'exercice 2.

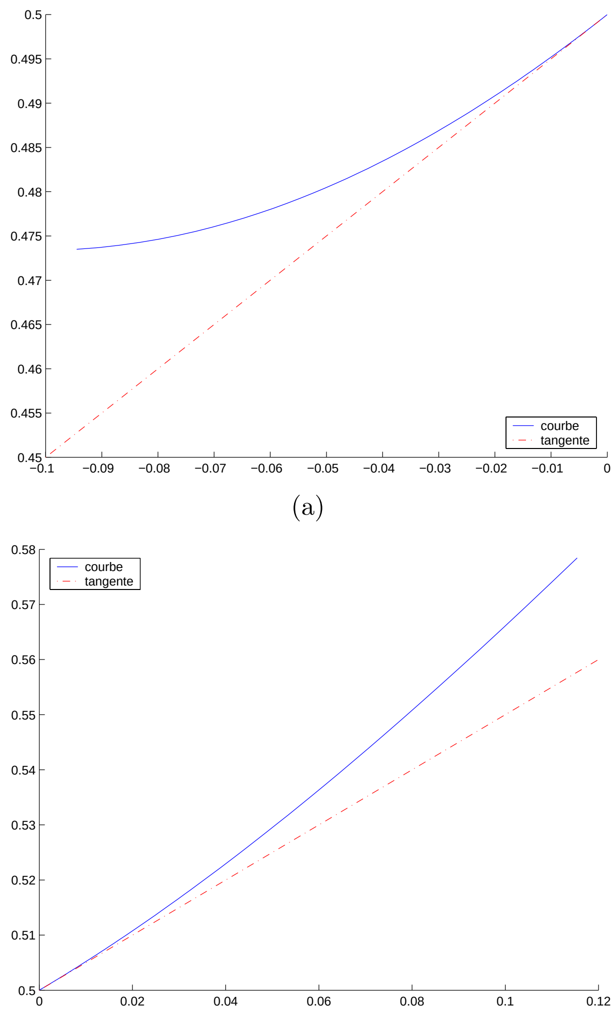
Cet exercice est issu de l'exemple 3 page 400 de [LFA01].

On étudie la courbe définie en polaire par

$$r(\theta) = \sin\left(\frac{2}{3}\,\theta\right). \tag{20}$$

(1) La fonction r est définie sur $\mathbb{R}$.

- Elle admet $T = 3\pi \notin 2\pi\mathbb{Z}$ comme période. D'après la proposition du cours 2.18 page 30 du chapitre 2, on se limite à un sous intervalle de I, d'amplitude T et on complète par des rotations de centre 0 et d'angle T. Prenons par exemple $I = [-3\pi/2, 3\pi/2]$. On complètera par des rotations de centre 0 et d'angle $3\pi = \pi\,[2\pi]$, c'est-à-dire des symétries de centre l'origine.



(a)

(b)

FIG. 2. La courbe au voisinage de $t = -\infty$ (a) et de $t = -\infty$ (b).

– D'autre part, on a

$$\forall \theta \in [-3\pi/2, 3\pi/2], \quad -\theta \in [-3\pi/2, 3\pi/2] \text{ et } r(-\theta) = -r(\theta).$$

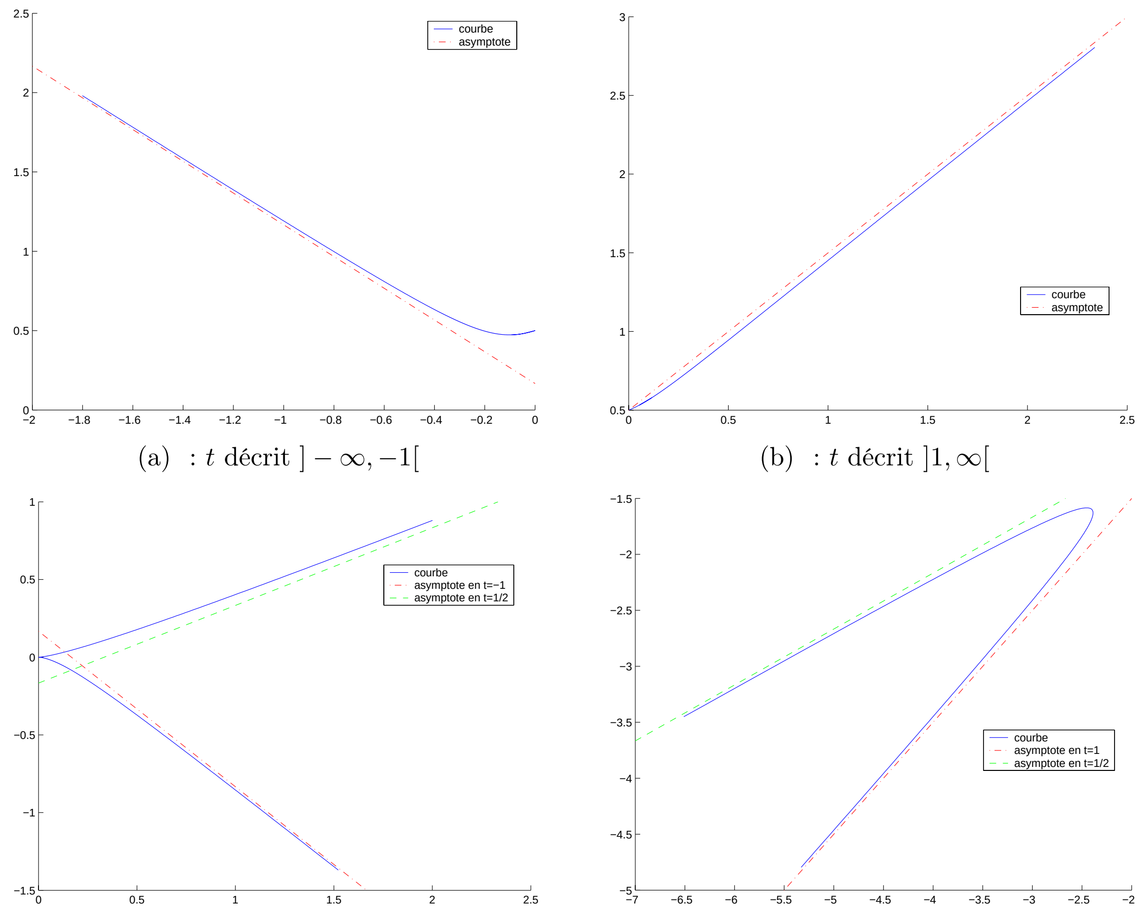
Ainsi, d'après la proposition du cours 2.22 page 31 du chapitre 2, on se limite à $[0, 3\pi/2]$ et on complète par la symétrie axiale par rapport à Oy.

– Enfin, on a

$$\forall \theta \in [0, 3\pi/2], \quad 3\pi/2 - \theta \in I \text{ et } r(3\pi/2 - \theta) = r(\theta),$$

Ainsi, d'après la proposition du cours 2.21 page 30 du chapitre 2 appliquée à $\alpha = 3\pi/2$, on se limite à $[0, 3\pi/4]$ et on complète par la symétrie axiale par rapport à la droite d'équation polaire $\theta = 3\pi/4$.

(2) La fonction sin est croissante sur $[0, \pi/2]$ donc r est croissante sur $[0, 3\pi/4]$ et on déduit le tableau de variation de r :



(a) : t décrit $]-\infty, -1[$ (b) : t décrit $]1, \infty[$

(c) : t décrit $]-1, 1/2[$ (d) : t décrit $]1/2, 1[$

FIG. 3. Tracés partiels de la courbes.

t	0		$3\pi/4$
r	0	$\nearrow$	1
r'	$2/3$	$+$	0

(3) D'après le tableau précedent et le lemme du cours 2.4 page 23, la tangente pour $\theta = 0$ est l'axe xx'. D'après le tableau précedent et le lemme du cours 2.4 page 23, la tangente pour $\theta = 3\pi/4$ fait un angle $-\pi/4$ avec l'axe xx'.

(4) On utilise l'équation (2.28) page 29 du cours pour θ décrivant $]-3\pi, 3\pi]$ (puisque d'amplitude égale à la période).

L'origine est obtenue pour 4 valeurs de θ, $-3\pi/2$, 0, $3\pi/2$ et 3π.

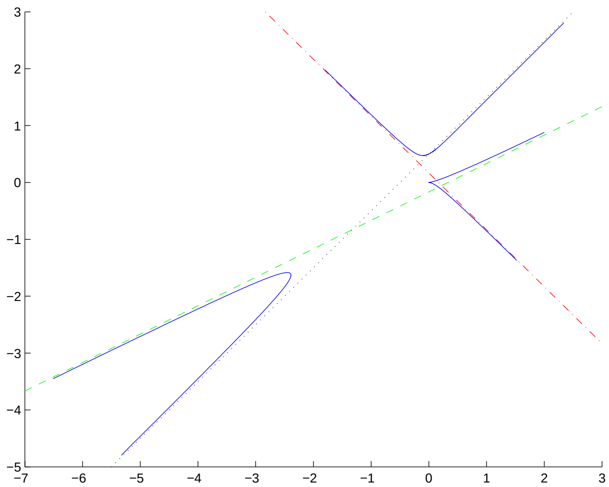


FIG. 4. La courbe pour t décrivant $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1/2, 1\}$.

D'autre part, l'équation (2.28) page 29 du cours pour θ décrivant $]-3\pi, 3\pi]$ donne les huit couples de valeurs de θ :

$$\left(-\frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right), \quad \left(-\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right), \quad \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right), \quad \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}\right),$$
$$(-2\pi, -\pi), \quad \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad (\pi, 2\pi), \quad \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right),$$

et donc les huit point correspondants :

$$\begin{aligned}
&\theta = \frac{\pi}{4}, \quad r = 1/2, \\
&\theta = -\frac{3\pi}{4}, \quad r = -1, \\
&\theta = -\frac{\pi}{4}, \quad r = -1/2, \\
&\theta = \frac{3\pi}{4}, \quad r = 1, \\
&\theta = -\pi, \quad r = -\sqrt{3}/2, \\
&\theta = \frac{\pi}{2}, \quad r = 1/2, \\
&\theta = \pi, \quad r = \sqrt{3}/2, \\
&\theta = \frac{3\pi}{2}, \quad r = 1.
\end{aligned}$$

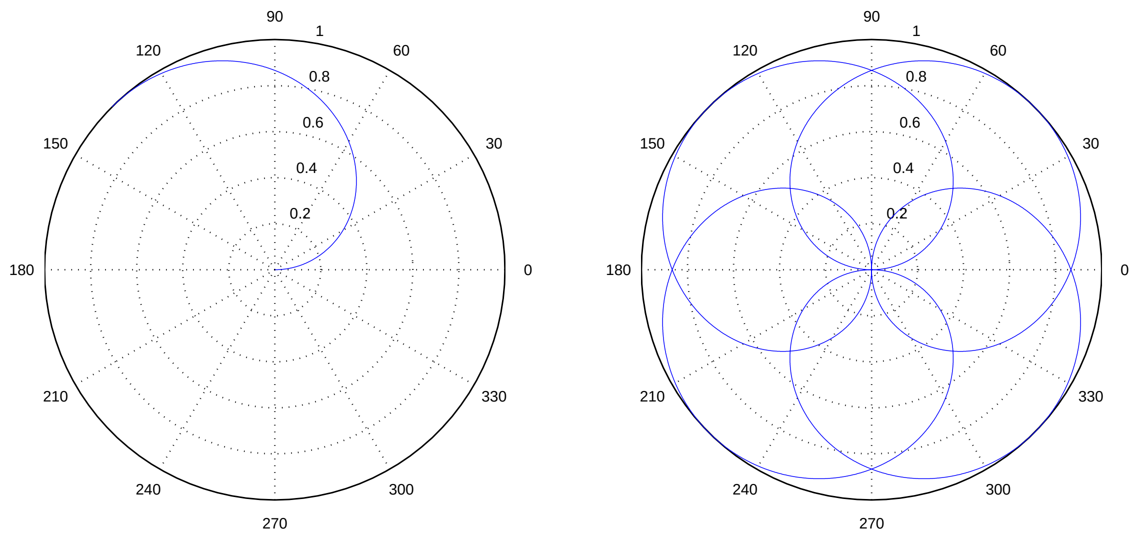
(5) Enfin, on a tracé la courbe en figure 5 page suivante.

Correction de l'exercice 3.

Cet exercice est issu de l'exemple 2 page 341 de [LFA01].

On étudie $\mathcal{L}$ l'arc de lemniscate défini en polaire par

$$\forall \theta \in [-\pi/4, \pi/4], \quad r(\theta) = \sqrt{\cos(2\theta)}. \tag{21}$$



(a) La courbe définie en polaire pour $\theta \in [0, 3\pi/4]$.

(b) La courbe définie en polaire pour $\theta \in \mathbb{R}$ (ou $[-3\pi, 3\pi]$).

FIG. 5. La courbe étudiée.

On utilise la méthode exposée dans la section 3.5.5 page 45 du cours (chapitre 3).

(1) On a

$$r'(\theta) = -\frac{\sin(2\theta)}{\sqrt{\cos(2\theta)}}, \tag{22}$$

et donc, puisque,

$$\left\|F'(\theta)\right\| = \frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)},$$

il vient

$$\left\|F'(\theta)\right\| = \frac{ds}{d\theta} = \frac{1}{\sqrt{\cos(2\theta)}}. \tag{23}$$

Il vient donc

$$\vec{T} = \sqrt{\cos(2\theta)}\left(r'(\theta)\vec{u}_\theta + r(\theta)\vec{v}_\theta\right),$$

et donc

$$\boxed{\forall \theta \in]-\pi/4, \pi/4[, \quad \vec{T} = -\sin(2\theta)\vec{u}_\theta + \cos(2\theta)\vec{v}_\theta} \tag{24}$$

ce qui est équivalent à

$$\vec{T} = \cos\left(2\theta + \pi/2\right)\vec{u}_\theta + \sin(2\theta + \pi/2)\vec{v}_\theta, \tag{25}$$

ce qui implique

$$\boxed{V(\theta) = \left(\widehat{\vec{u}_\theta, \vec{T}}\right) = 2\theta + \frac{\pi}{2}} \tag{26}$$

(2) D'après la relation de Chasles, on en déduit

$$\boxed{\phi = \left(\widehat{\vec{i}, \vec{T}}\right) = 3\theta + \frac{\pi}{2}} \tag{27}$$

(3) On a finalement

$$c = \frac{d\phi}{ds} = \frac{1}{\|F'(\theta)\|}\frac{d\phi}{d\theta}$$

et donc

$$\boxed{c = 3\sqrt{\cos(2\theta)}} \tag{28}$$

On en déduit, après simplification, les coordonnées x_I et y_I du centre de courbure

$$\boxed{x_I = \frac{2\cos^3\theta}{3\sqrt{\cos(2\theta)}}}$$

$$\boxed{y_I = -\frac{2\sin^3\theta}{3\sqrt{\cos(2\theta)}}}$$

Références

[LFA01] J. Lelong-Ferrand et J.M. Arnaudiès. *Cours de mathématiques, tome 3 : géométrie et cinématique*. Dunod, 2001. disponible à la bibliothèque de l'UTBM, sous la cote QA 445 LEL.