

Examen médian du 13 avril 2007

Durée : 2 heure(s)

Une feuille A4 recto de rappels de cours et une calculatrice autorisées.

On rédigera les exercices 1 et 2 sur une copie (ou plus) et l'exercice 3 sur une autre.

Exercice 1. Soit la courbe paramétrique du plan définie par

$$x(t) = \frac{t^2}{(t^2 - 1)(2t - 1)}, \quad (1a)$$

$$y(t) = \frac{t^3}{(t^2 - 1)(2t - 1)}. \quad (1b)$$

- (1) Étudier les variations de x et y et dresser leur tableau de variation. *Pour cette question, on admettra que la fonction polynomiale $t \mapsto t^3 + t - 1$ n'admet qu'une seule racine réelle $\alpha \approx 0.6823278038280193$.*
- (2) Déterminer la tangente en $t = 0$ et la nature du point $t = 0$.
- (3) Déterminer les branches infinies et la position de la courbe par rapport à ces branches.
- (4) Déterminer la tangente à la courbe en $t = \pm\infty$ et la position de la courbe par rapport à sa tangente en $t = \pm\infty$
- (5) Tracer la courbe.

Exercice 2. Soit la courbe définie en polaire par

$$r(\theta) = \sin\left(\frac{2}{3}\theta\right). \quad (2)$$

- (1) Montrer que l'on peut étudier la courbe pour $\theta \in [0, 3\pi/4]$.
- (2) Dresser le tableau de variation de r sur $[0, 3\pi/4]$.
- (3) Définir les tangentes à la courbe aux points particuliers.
- (4) *Question facultative* Déterminer les points doubles.
- (5) Tracer la courbe.

Exercice 3. Soit \mathcal{L} l'arc de lemniscate défini en polaire par

$$\forall \theta \in [-\pi/4, \pi/4], \quad r(\theta) = \sqrt{\cos(2\theta)}. \quad (3)$$

(1) Montrer, avec les notations usuelles, que

$$\forall \theta \in]-\pi/4, \pi/4[, \quad \vec{T} = -\sin(2\theta)\vec{u}_\theta + \cos(2\theta)\vec{v}_\theta, \quad (4)$$

et en déduire l'angle $V(\theta) = \left(\widehat{\vec{u}_\theta, \vec{T}}\right)$.

(2) En déduire l'angle entre le vecteur de base \vec{i} et le vecteur unitaire tangent \vec{T} , $\phi = \left(\widehat{\vec{i}, \vec{T}}\right)$.

(3) En déduire la courbure et l'expression des coordonnées du centre de courbure.

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/>