MÉDIAN

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'attribution de la note. Le barème est donné à titre indicatif.

Une feuille A4 manuscrite est autorisée pour l'épreuve ainsi que les calculatrices et traducteurs. Vous pourrez utiliser librement le formulaire[1]

Exercice 1 Deltoïde (10 points)

Dans cet exercice on étudie la courbe plane définie par les équations paramétriques suivantes

$$\begin{cases} x(t) &= 2\cos(t) + \cos(2t) \\ y(t) &= 2\sin(t) - \sin(2t) \end{cases}$$

1. Faire l'étude complète (définition, variation, points singuliers,...) de la courbe puis la tracer.

2. Calculer sa longueur.

3. Déterminer une paramétrisation par longueur d'arc.

Exercice 2 Repère de Frenet (7 points)

Soit la courbe paramétrée de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\begin{cases} x(t) &= e^t \\ y(t) &= e^{-t} \\ z(t) &= t\sqrt{2} \end{cases}$$

1. Calculer $k(t)$ et $\tau(t)$ la courbure et la torsion. Montrer que le rapport $\frac{\tau}{k}$ est constant.

2. Déterminer le repère de Frenet (T, N, B) pour tout t.

3. Soit f une fonction trois fois dérivable. On considère γ la courbe paramétrée définie par

$$\begin{cases} x(t) &= e^t \\ y(t) &= e^{-t} \\ z(t) &= f(t) \end{cases}$$

On suppose que f est telle que la courbure de γ ne s'annule pas. Montrer que γ est contenue dans un plan si et seulement si $f' - f''' = 0$.

Exercice 3 Courbes planes à courbure constante (3 points)

Dans cet exercice vous allez démontrer par une autre méthode un résultat vu en T.D. Soit γ une courbe plane régulière paramétrée par longueur d'arc. On suppose que la courbure de γ est constante $k(s) = k$. Comme dans le cours on note $(t(s), n(s))$ le repère de Frenet au point $M(s)$.

1. On considère la courbe $\beta(s) = \gamma(s) + \frac{1}{k}n(s)$. Montrer que $\beta'(s) = \vec{0}$. En déduire que β est constante, on note P le point du plan tel que $\overrightarrow{OP} = \beta(s)$.

2. Montrer que $\|\overrightarrow{PM(s)}\| = \frac{1}{k}$.

3. Que pouvez-vous en conclure sur l'ensemble des points M ?

[1] Formulaire : $\sin(a) + \sin(b) = 2\sin(\frac{a+b}{2})\cos(\frac{a-b}{2}), \sin(a) - \sin(b) = 2\sin(\frac{a-b}{2})\cos(\frac{a+b}{2}), \cos(a) + \cos(b) = 2\cos(\frac{a+b}{2})\cos(\frac{a-b}{2}), \cos(a) - \cos(b) = -2\sin(\frac{a+b}{2})\sin(\frac{a-b}{2})$