MÉDIAN

Exercice 1 (7 points)

On considère la courbe paramétrée $f(t) = (\cos(t), t - \frac{1}{2}\sin(2t))$. avec $t \in \mathbb{R}$.

1. Faire l'étude complète de f sur l'intervalle $[0, \pi]$.

2. Montrer que la courbe possède un point d'inflexion en $t = \frac{\pi}{2}$.
(On admettra qu'il n'y en a pas d'autre sur l'intervalle $[0, \pi]$.)

3. Vérifier que $y(t + 2\pi) = y(t) + 2\pi$. Donner les autres propriétés de périodicité et de parité de f.

4. Tracer la courbe de f. **[changer de copie]**

Exercice 2 (7 points)

1. Soit $\gamma(s) = (x(s), y(s))$, avec $s \in I$, une courbe plane régulière paramétrée par longueur d'arc de courbure non nulle. On note $(t(s), n(s))$ le repère de Frenet au point $\gamma(s)$. On note (O, e_1, e_2) le repère orthonormé du plan. On introduit la fonction $\theta : I \to [0, 2\pi]$ définie par $\theta(s) = (\widehat{e_1, t(s)})$ (angle entre les vecteurs e_1 et $t(s)$). On a ainsi $t(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s)))$.

a. Montrer que $k(s) = |\theta'(s)|$.

b. Déterminer $t(s)$ lorsque $k(s) = k$ (c'est à dire lorsque la courbure est constante).

c. Après avoir fixé les conditions initiales $\gamma(0) = (0, -\frac{1}{k})$, $t(0) = (1, 0)$ et $n(0) = (0, 1)$ montrer que γ est une courbe incluse dans un cercle.

2. On ne suppose plus maintenant que la courbe est paramétrée par longueur d'arc. On note $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ une courbe plane régulière et $(T(t), N(t))$ le repère de Frenet au point $\gamma(t)$ et on introduit la fonction θ définie par $\theta(t) = (\widehat{e_1, T(t)})$

a. Montrer que pour tout t, on a $k(t) = \frac{|\theta'(t)|}{||\gamma'(t)||}$

b. On rappelle qu'une paramétrisation de l'astroïde est $x(t) = \cos^3(t)$, $y(t) = \sin^3(t)$, pour des raisons de symétrie on peut supposer que $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

i. Calculer $T(t)$.

ii. Montrer que $\theta(t) = \pi - t$.

iii. En déduire la courbure de l'astroïde.

Exercice 3 Retour sur les courbes sphériques (6 points)

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe régulière de courbure et torsion non nulles. Nous avons vu en TD que si une telle courbe était contenue dans une sphère de rayon a alors elle devait vérifier l'équation $\dfrac{1}{k^2} + (\dfrac{k'}{k^2\tau})^2 = a^2$. Le but de cet exercice est de démontrer la réciproque.

On suppose donc que $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ est une courbe régulière de courbure et torsion non nulles paramétrée par longueur d'arc et qu'il existe un réel a tel que $\dfrac{1}{k^2} + (\dfrac{k'}{k^2\tau})^2 = a^2$ est vérifiée. On note $(t(s), n(s), b(s))$ le repère de Frenet en $\gamma(s)$.

1. Montrer que $\dfrac{1}{k^2} + (\dfrac{k'}{k^2\tau})^2 = a^2$ implique $(\dfrac{k'}{k^2\tau})' = \dfrac{\tau}{k}$.

2. Soit $I(s) = \gamma(s) + \frac{1}{k}n(s) + \frac{k'}{k^2\tau}b(s)$. Calculer $I'(s)$.

3. Montrer que $||\gamma(s) - I(s)||^2 = a^2$.

4. Conclure.