MÉDIAN

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'attribution de la note. Le barème est donné à titre indicatif. Matériel autorisé : une feuille A4 de notes et la calculatrice.

Le sujet comporte trois exercices, merci de rendre **une copie par exercice**

Exercice 1 Un Poisson (8 points)

Dans cet exercice on considère γ la courbe paramétrée définie par

$$\gamma(t) = (\cos(t) - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos^2(t), \sin(t)\cos(t))$$

1. Montrer qu'on peut réduire l'intervalle d'étude à $[0, \pi]$.

2. Étudier les variations et déterminer le point singulier de la courbe dont on fera l'étude (on admettra que la courbe n'admet pas de points d'inflexion).

3. Tracer la courbe (vous ferez apparaître les tangentes remarquables).

CHANGER DE COPIE

Exercice 2 Un peu de calcul (7 points)

On considère la courbe paramétrée dans $\mathbb{R}^3$, définie sur $[0, \pi]$ par $\gamma(u) = (x(u), y(u), z(u))$ avec

$$\begin{cases} x(u) &= (1+\cos(u))\cos(u) \\ y(u) &= (1+\cos(u))\sin(u) \\ z(u) &= 4\sin(\frac{u}{2}) \end{cases}$$

1. En utilisant le formulaire [1] montrer que $\gamma'(u) = 2\cos(\frac{u}{2})\begin{pmatrix} -\sin\frac{3u}{2} \\ \cos\frac{3u}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. En déduire la longueur L de la courbe pour $u \in [0, \pi]$.

3. Déterminer le repère de Frenet au point $\gamma(u)$.

4. Calculer la courbure et la torsion en $\gamma(u)$

Indication : on pourra éviter d'avoir recourt aux formules trop calculatoires en considèrant $(t(s), n(s), b(s))$ le repère de Frenet associé à la parmétrisation normale de γ et en dérivant les expressions $T(u) = t(s(u))$ et $B(u) = b(s(u))$ pour obtenir $k(s(u))$ et $\tau(s(u))$.

CHANGER DE COPIE

TOURNER LA PAGE

1. Formulaire : $2\sin(u)\cos(u) = \sin(2u)$, $\cos^2(u) - \sin^2(u) = \cos(2u)$, $\sin(u) + \sin(2u) = 2\cos(\frac{u}{2})\sin(\frac{3u}{2})$, $\cos(u) + \cos(2u) = 2\cos(\frac{u}{2})\cos(\frac{3u}{2})$

Exercice 3 Développée et développante (7 points)

On considère $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée par longueur d'arc et de courbure $k(s)$ (on supposera $k(s) \neq 0$ pour tout $s \in I$). On note $(t(s), n(s))$ le repère de Frenet associé. On rappelle que la développée de α est la courbe paramétrée $\beta : I \to \mathbb{R}^2$ définie par $\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)} n(s)$.

1. Montrer qu'en général β n'est pas paramétrée par longueur d'arc.
2. Soit $\tilde{k}(s)$ la courbure de β en s, montrer que $\tilde{k}(s) = |\dfrac{k^3(s)}{k'(s)}|$.
3. Vérifier qu'une courbe α de courbue $k(s)$ qui satisfait la condition $\dfrac{1}{k(s)^2} = 2as$ (avec a constante positive) admet pour développée un cercle de rayon a (la courbe α est appelée développante du cercle).
4. Résoudre l'équation différentielle $y' + ay^3 = 0$ (c'est une équation de Bernouilli qu'on résout avec le changement de variable $u = \frac{1}{y^2}$). En déduire que si α est une courbe plane de courbure décroissante ($k'(s) < 0$) dont la développée est un cercle de rayon a, alors α est une développante de cercle (c'est à dire vérifie $\frac{1}{k^2(s)} = 2as$).

Élément de correction

Exercice 1

Exercice 2

1. Sans surprise il faut dériver γ et appliquer le formulaire $\gamma'(u) = 2\cos\frac{u}{2}\begin{pmatrix} -\sin\frac{3u}{2} \\ \cos\frac{3u}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. On en déduit $\|\gamma'(u)\| = \sqrt{4\cos^2\frac{u}{2}((-\sin\frac{3u}{2})^2 + (\cos\frac{3u}{2})^2 + 1^2)} = \sqrt{4\cos^2\frac{u}{2}\times 2} = 2\sqrt{2}\sqrt{\cos^2\frac{u}{2}}$. Or $u \in [0,\pi]$ donc $\frac{u}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Ainsi pour tout $u \in [0,\pi]$ on a $\cos\frac{u}{2} \geqslant 0$, on en déduit, pour $u \in [0,\pi]$, $\sqrt{\cos^2\frac{u}{2}} = \cos\frac{u}{2}$. D'où

$$L = \int_O^\pi \|\gamma'(u)\|du = \int_0^\pi 2\sqrt{2}\cos\frac{u}{2}du = [4\sqrt{2}\sin\frac{u}{2}]_0^\pi = 4\sqrt{2}$$

3. Calcul du repère de Frenet :

- Le vecteur tangent s'obtient facilement $T(u) = \dfrac{\gamma'(u)}{\|\gamma'(u)\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -\sin\frac{3u}{2} \\ \cos\frac{3u}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.
- On obtient le vecteur normal en calculant $N(u) = \dfrac{T'(u)}{\|T'(u)\|}$. Or $T'(u) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\cos\frac{3u}{2} \\ -\frac{3}{2}\sin\frac{3u}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\|T'(u)\| = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{9}{4}\cos^2\frac{3u}{2} + \frac{9}{4}\sin^2\frac{3u}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Ce qui donne $N(u) = \begin{pmatrix} -\cos\frac{3u}{2} \\ -\sin\frac{3u}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Enfin on obtient le vecteur binormal $B(u) = T(u) \wedge N(u) = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} \sin\frac{3u}{2} \\ -\cos\frac{3u}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Calcul de la courbure et la torsion. On considère $\tilde{\gamma}$ une paramétrisation normale telle que $\tilde{\gamma}\circ s = \gamma$ où s est l'application abscisse curviligne. On note $(t(s), n(s), b(s))$ le repère de Frenet au point $\tilde{\gamma}(s)$.

- Dérivons l'égalité $T(u) = t(s(u))$, on obtient $T'(u) = t'(s(u))s'(u) = k(s(u))n(s(u))\|\gamma'(u)\|$ qui donne en prenant la norme $k(s(u)) = \dfrac{\|T'(u)\|}{\|\gamma'(u)\|}$. On obtient alors $k(s(u)) = \dfrac{3}{4\cos\frac{u}{2}}$.
- De même dérivons l'égalité $B(u) = b(s(u))$ on obtient $B'(u) = b'(s(u))s'(u)) = -\tau(s(u))n(s(u))\|\gamma'(u)\|$. Or $B'(u) = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} \cos\frac{3u}{2} \\ \sin\frac{3u}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\|\gamma'(u)\|n(s(u)) = 2\sqrt{2}\cos\frac{u}{2}N(u) =$

$2\sqrt{2}\cos\frac{u}{2}\begin{pmatrix} -\cos\frac{3u}{2} \\ -\sin\frac{3u}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$. À partir de l'égalité $B'(u) = -\tau(s(u))N(u)\|\gamma'(u)\|$ on rn déduit $\tau(s(u)) = -\dfrac{3}{4\cos\frac{u}{2}}$.

Exercice 3

1. On a $\beta'(s) = (\alpha(s) + \frac{1}{k(s)}n(s))' = \alpha'(s) + (-\frac{k'(s)}{k^2(s)})n(s) + \frac{1}{k(s)}(-k(s)t(s))$ d'après les équations de Frenet. En rappelant que $\alpha'(s) = t(s)$ on obtient $\beta'(s) = t(s) - \frac{k'(s)}{k^2(s)}n(s) - t(s) = -\frac{k'(s)}{k^2(s)}n(s)$. En prenant la norme cela donne $\|\beta'(s)\| = |\dfrac{k'(s)}{k^2(s)}|$. Or a prirori la fonction $|\dfrac{k'(s)}{k^2(s)}| \neq 1$, donc on peut considérer qu'en général β n'est pas paramétrée par longueur d'arc.

2. Comme β n'est pas paramétrée par longueur d'arc on utilise l'expression de la courbure dans le cas général, à savoir $\tilde{k}(s) = \dfrac{\|\beta'(s) \wedge \beta''(s)\|}{\|\alpha'(s)\|}$. Or $\beta''(s) = (-\dfrac{k'(s)}{k^2(s)}n(s))' = (-\frac{k'(s)}{k^2(s)})'n(s) - \frac{k'(s)}{k^2(s)}(-k'(s)t(s))$ d'après les équations de Frenet dans le plan. D'où $\beta'(s) \wedge \beta''(s) = (-\dfrac{k'(s)}{k^2(s)}n(s)) \wedge ((-\frac{k'(s)}{k^2(s)})'n(s) - \frac{k'(s)}{k^2(s)}(-k(s)t(s)) = -\dfrac{k'(s)^2}{k(s)^3}n(s) \wedge t(s)$. Or $\|\beta'(s)\| = |\dfrac{k'(s)}{k^2}(s)|$ ce qui donne

$$\tilde{k}(s) = \frac{|\frac{k'(s)^2}{k(s)^3}|}{|\frac{k'(s)^3}{k(s)^6}|} = |\frac{k(s)^3}{k'(s)}|$$

3. On suppose que α vérifie $\dfrac{1}{k^2(s)} = 2as$. En dérivant cette condition devient $-\dfrac{-2k'(s)}{k^3(s)} = 2a$. En prenant la valeur absolue cela donne $|\dfrac{k'(s)}{k^3(s)}| = a$. Si on constuit β la développée de α la question précédente montre que la courbure de β est $\tilde{k}(s) = \dfrac{1}{a}$. Donc β est une courbe plane à courbure constante égale à $\dfrac{1}{a}$, c'est à dire β est un(e) (portion) de cercle de rayon a.

4. En posant $u = \dfrac{1}{y^2}$ l'équation $y' + ay^3 = 0$ devient $u' - 2a = 0$. On résout cette équation ce qui donne $u(s) = 2as$ c'est à dire $\dfrac{1}{y^2(s)} = 2as$. Prenons maintenant une développée β d'une courbe α telle que β soit un cercle (ou une portion de cercle) de rayon a. La courbe β est donc de courbure constante $\tilde{k}(s) = \dfrac{1}{a}$. Comme

$\tilde{k}$ s'exprime en fonction de k la courbure de α on a $|\dfrac{k^3(s)}{k'(s)}| = \dfrac{1}{a}$, $k'(s)$ étant négative par hypothèse on enlève la valeur abolue : $-\dfrac{k^3(s)}{k'(s)} = \dfrac{1}{a} \Leftrightarrow k'(s)+ak^3(s) = 0$. Or on vient de résoudre cette dernière équation et la solution k doit vérifier $\dfrac{1}{k^2(s)} = 2as$ ce qui implique que α est bien une développante de cercle.