MÉDIAN

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'attribution de la note. Le barème est donné à titre indicatif. Matériel autorisé : une feuille A4 de notes et la calculatrice.

Le sujet comporte trois exercices, merci de rendre **une copie par exercice**

Exercice 1 Étude d'une courbe plane (7 points)

Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équations paramétriques définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$:

$$x(t) = t^2 + 2t \qquad y(t) = \frac{2t+1}{t^2}$$

1. Faire l'étude de la courbe (variations, point(s) singulier(s), limites). *Indication : pour l'étude du point singulier on pourra poser $t = -1+u$ et faire un développement limité lorsque $u \to 0$*

2. Tracer la courbe en faisant apparaître les éléments mis en avant à la question précédente.

CHANGER DE COPIE

Exercice 2 Cardioïde (7 points)

On considère la courbe plane ci-dessous, appelée Cardioïde (ça vous dit quelque chose ?) :

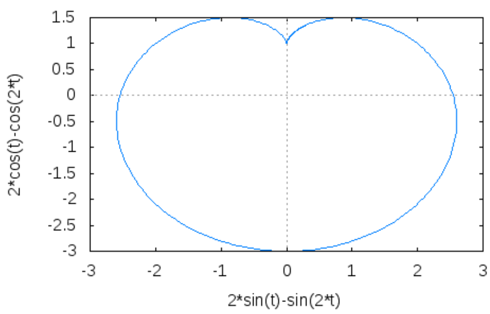

Figure 1 – Cardioïde

dont les équations paramétriques sont pour $t \in [0, 2\pi]$

$$\begin{cases} x(t) &= 2\sin(t) - \sin(2t) \\ y(t) &= 2\cos(t) - \cos(2t) \end{cases}$$

1. Montrer que $\|\gamma'(t)\|^2 = 16\sin^2(\frac{t}{2})$. *Indication : on pourra utiliser les relations trigonométriques suivantes* $\sin(a)-\sin(b) = 2\sin(\frac{a-b}{2})\cos(\frac{a+b}{2})$ *et* $\cos(a)-\cos(b) = -2\sin(\frac{a+b}{2})\sin(\frac{a-b}{2})$.

2. Calculer la longueur de la courbe ;

3. Déterminer la courbure en tout point $(x(t), y(t))$ pour $t \neq 0$.

4. Calculer le vecteur tangent $T(t)$ du repère de Frenet au point $\gamma(t)$ et en déduire le vecteur normal $N(t)$ à l'aide d'un dessin et des coordonnées de $T(t)$.

5. Donner les équations paramétriques de la développée de la Cardioïde.

CHANGER DE COPIE

Exercice 3 Développante (7 points)

On considère $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée par longueur d'arc et on note $(t(s), n(s), b(s))$ le repère de Frenet au point $\gamma(s)$. Les fonctions $k(s)$ et $\tau(s)$ représentent la courbure et la torsion en ce point. On suppose que k et τ ne s'annulent pas sur $[0, L]$. L'intervalle de définition de γ étant $[0, L]$, le paramètre s est toujours positif. On appelle *développante* de γ la courbe α définie par

$$\alpha(s) = \gamma(s) - st(s)$$

1. Montrer que $\|\alpha'(s)\| = sk(s)$.

2. Montrer que $\alpha' \wedge \alpha'' = s^2k^2(s)\tau(s)t(s) - s^2k^3(s)b(s)$ et donner les coordonnées du vecteur $\alpha' \wedge \alpha''$ dans la base (t, n, b).

3. Conclure que la courbure $\tilde{k}$ de α au point $\alpha(s)$ est $\tilde{k}(s) = \dfrac{\sqrt{k^2(s)+\tau^2(s)}}{sk(s)}$.

Pour alléger les notations on écrira k *et* τ *pour* $k(s)$ *et* $\tau(s)$ *pour la fin de l'exercice et* k' *et* τ' *pour* $k'(s)$ *et* $\tau'(s)$.

4. Un calcul (fastidieux) permet d'établir que

$$\begin{aligned}\alpha'' \wedge \alpha''' = \; & (2skk'\tau + sk^2\tau' - 2s^2k'^2\tau - s^2kk'\tau' - s^2k^2\tau^2 - s^2k^3\tau + s^2k\tau k'')t(s) \\ & + s^2k^2(k'\tau - k\tau')n(s) + sk(sk^2\tau^2 + sk^4 - skk'' - 3kk' - 3sk'^2)b(s)\end{aligned}$$

Montrer alors que la torsion $\tilde{\tau}$ de α au point $\alpha(s)$ est donnée par $\tilde{\tau}(s) = -\dfrac{k'\tau - k\tau'}{sk(k^2+\tau^2)}$.

5. En déduire que si γ est une hélice généralisée (i.e. $\frac{k}{\tau} = c$, avec $c \in \mathbb{R}$) alors α est une courbe plane.