MÉDIAN

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'attribution de la note. Le barème est donné à titre indicatif. Matériel autorisé : une feuille A4 de notes et la calculatrice.

Le sujet comporte trois exercices, merci de rendre **une copie par exercice**

Exercice 1 Courbes planes (5 points)

Les deux questions suivantes sont indépendantes l'une de l'autre.

1. On considère la courbe paramétrée définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par $f(t) = (x(t), y(t))$ avec $x(t) = \dfrac{3t}{1+t^3}$ et $y(t) = \dfrac{3t^2}{1+t^3}$.

a. Calculer $f(\frac{1}{t})$.

b. Expliquer comment on peut réduire le domaine d'étude à l'intervalle $]-1, 1]$.

2. On donne le tableau de variation suivant pour une courbe paramétrée g définie sur $\mathbb{R}$ et donnée par $g(t) = (x(t), y(t))$. Tracer précisemment la courbe à partir du tableau et des informations qui suivent.

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$x'(t)$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0
$y'(t)$	0	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	0
$x(t)$	0	$\searrow$	-2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-2	$\nearrow$	0
$y(t)$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2

- La fonction g est 2π-périodique, la fonction x est impaire, la fonction y paire.
- $g^{(2)}(0) = (0, -1)$, $g^{(3)}(0) = (-1, 0)$ et $g^{(2)}(\pi) = (0, 1)$ et $g^{(3)}(\pi) = (1, 0)$.
- La fonction ne possède pas de points d'inflexions.
- $g(\frac{\pi}{6}) = g(\frac{5\pi}{6}) = (\frac{-1}{2}, 0)$.

Changer de copie

Exercice 2 Spirale (8 points)

Le plan est rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On rappelle qu'une spirale est une courbe plane qui correspond au déplacement d'un point mobile sur une droite en rotation autour de l'origine et passant par l'origine. En notant $\overrightarrow{u}(t) \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de la droite en rotation et $r(t)$ la distance entre l'orgine et le point $M(t)$ de la spirale de coordonnées $\gamma(t)$, on obtient les équations paramétriques de la spirale sous la forme

$$\gamma(t) = r(t)\overrightarrow{u}(t) = (r(t)\cos(t), r(t)\sin(t)) \text{ avec } t \in I.$$

On supposera que $r(t)$ est monotone et $r(0) = 1$.

1. Esquisser les trois types de spirales vérifiant :

- **a.** $\lim_{t\to+\infty} r(t) = +\infty$.
- **b.** $r(t) = 1$, $\forall t \in I$.
- **c.** $\lim_{t\to+\infty} r(t) = 0$.

2. On suppose dans cette question que $r(t) = e^{at}$. C'est-à-dire on considère la courbe paramétrée $\gamma : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (e^{at}\cos(t), e^{at}\sin(t))$.

- **a.** Montrer que $\|\gamma'(t)\| = e^{at}\sqrt{a^2+1}$.
- **b.** Si $a < 0$ calculer la longueur de l'image $\gamma([0, +\infty[)$. Que se passe-t-il si $a > 0$?
- **c.** Calculer la courbure $k(t)$ et déterminer $\lim_{t\to+\infty} k(t)$ lorsque $a < 0$ et $a > 0$. Commenter. Que dire si $a = 0$?
- **d.** Calculer $\dfrac{\gamma(t).\gamma'(t)}{\|\gamma(t)\|\|\gamma'(t)\|}$. En déduire que quelque soit t le vecteur $\overrightarrow{OM(t)}$, de coordonnées $\gamma(t)$, et le vecteur tangent $\gamma'(t)$ font un angle constant. Illustrer à l'aide d'un dessin simple les trois comportements possibles $a < 0, a = 0$ et $a > 0$.

Changer de copie

Exercice 3 Un résultat du cours (8 points)

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe de l'espace muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Notons $v(t) = \|\gamma'(t)\|$ et $(T(t), N(t), B(t))$ le repère de Frenet au point $\gamma(t)$. On rappelle que pour une paramétrisation non nécessairement normale les formules de Frenet sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{rcc} T'(t) &=& v(t)k(t)N(t) \\ N'(t) &=& -v(t)k(t)T(t) - v(t)\tau(t)B(t) \\ B'(t) &=& v(t)\tau(t)N(t) \end{array} \right.$$

Avec $k(t)$ et $\tau(t)$ la courbure et la torsion en $\gamma(t)$. Dans cet exercice on démontre le résultat du cours qui établit l'expression de la torsion pour une courbe non paramétrée par longueur d'arc en fonction de γ', γ'' et $\gamma^{(3)}$.

1. Exprimer $\gamma'(t)$ en fonction de $v(t)$ et $T(t)$.

2. En déduire en utilisant les équations de Frenet que $\gamma''(t) = v'(t)T(t)+v^2(t)k(t)N(t)$.

3. En dérivant à nouveau calculer $\gamma^{(3)}(t)$. On vérifiera en particulier que la composante de $\gamma^{(3)}(t)$ sur $B(t)$ est $-\tau(t)v^3(t)k(t)$.

4. Montrer que $-\gamma'(t).(\gamma''(t) \wedge \gamma^{(3)}(t)) = \tau(t)v^6(t)k^2(t)$.
Indication : on pourra expliquer avant de se lancer dans des calculs trop longs pourquoi seule la composante de γ'' sur $N(t)$ et celle de $\gamma^{(3)}$ sur $B(t)$ vont intervenir dans le résultat final.

5. Montrer à l'aide de l'expression de la courbure vue en cours que

$$\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\| = v^3(t)k(t).$$

Et en déduire à l'aide de **4.** le résultat donné en cours $\tau(t) = \dfrac{-\gamma'(t).(\gamma''(t) \wedge \gamma^{(3)}(t))}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2}$.

6. Application.

a. Montrer que si $\tau(t) = 0$ pour tout $t \in I$, alors le vecteur B est constant.

b. Dériver $\gamma(t).B(t)$ et en déduire que si $\tau(t) = 0$ alors $\gamma(I)$ est une courbe plane contenue dans le plan orthogonal à B passant par l'origine (on pourra supposer que $\gamma(0).B(0) = 0$ par changement de repère).

c. Montrer que la courbe déquation paramétrique $\gamma(t) = (t, \dfrac{1+t}{t}, \dfrac{1-t^2}{t})$ est une courbe plane.

Exercice 1

1. La fonction vectorielle f est effectivement définie sur $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$ puisque $1 + t^3 = (1+t)(t^2+t+1)$ s'annule pour la seule valeur réelle $t = -1$.

Remarque : Vu que D_f est disymétrique par rapport à 0, ni x ni y n'ont de chance d'être paires ou impaires, ce qui rend cette vérification totalement inutile.

a. Pour tout $t \neq 0$, on calcule $f(1/t)$. Les détails des calculs doivent apparaître ; en effet certaines de vos machines calculent formellement, et vous devez prouver que votre compétence ne se borne pas à recopier un affichage...

Il vient après un calcul fractionnaire simple : $x(1/t) = y(t)$ et $y(1/t) = x(t)$. Comme vu en tds, on en déduit que les points $M(t)$ et $M'(1/t)$ sont symétriques par rapport à la droite $D : y = x$, dite aussi première bissectrice.

b. *Réduction de l'intervalle d'étude de f*

f est définie sur $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$; en particulier $f(0)$ et $f(1)$ sont parfaitement définis.

– Lemme
On établit que la fonction g définie par $g(t) = 1/t$ est une bijection de $]-1, 1[- \{0\}$ dans $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.
Preuve :
(1) g est définie, continue dérivable sur $I =]-1, 1[- \{0\}$ comme fonction rationnelle définie sur cet ensemble.
(2) Variations
$g'(t) = -1/t^2 < 0$ pour tout t de I. On en déduit le tableau de variations suivant, complété après étude de limites fort simples, non traitées ici.

t	-1			0			1
$g'(t)$		$-$		$\|$		$-$	
$g(t)$	-1	$\searrow$	$-\infty$	$\|$	$+\infty$	$\searrow$	1

Vu la continuité de g et sa stricte monotonie on end éduit la bijectivité annoncée.

– Par suite, en raison des remarques antérieures, on fera l'étude de f sur $]-1, 1]$ et on déduira le reste de la courbe représentative par symétrie par rapport à la première bissectrice grâce au lemme précédent.

2. Un étudiant de mt25 doit saisir que toutes les informations fournies dans l'énoncé doivent être interprétées pour prouver un certain nombre de conséquences géométriques qui justifient le tracé fourni.

Affirmer sans preuve ne saurait être suffisant pour deux raisons : l'une scolaire, l'autre professionnelle dans votre métier futur. D'abord, affirmer par exemple sans argument que tel point est de rebroussement de première espèce risque de seulement prouver que vous savez lire une représentation fournie par votre calculette. Ensuite dans votre métier, vous travaillerez évidemment sous calculateur ; votre compétence consistera à savoir lire et interroger les résultats produits par votre outil de calcul. Vous devrez savoir prouver qu'un point est de rebroussement ou bien régulier car l'aspect graphique ne suffit pas toujours à l'établir. Ce cas précis est arrivé au rédacteur de ce corrigé dans le cadre d'un suivi de ST50 pour un étudiant du GM !

a. Argumentaire du tracé

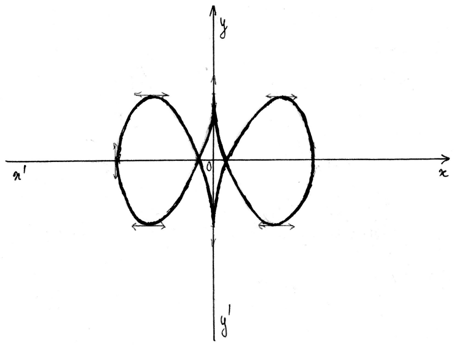
- g est 2π-périodique et définie sur $\mathbb{R}$. Par suite on étudie g sur un intervalle de la forme $[\alpha, \alpha + 2\pi]$ et on disposera de la totalité de la courbe représentative de g. Penser qu'on étudie nécessairement sur $[-\pi, \pi]$ est une idée fausse. En effet si g vérifie pour tout t une propriété du genre : $g(\pi/2 - t) = g(\pi/2 + t)$, alors α sera choisi pour centrer l'intervalle autour de $\pi/2$.
- On sait que x est impaire et y paire sur $\mathbb{R}$; par suite la courbe représentative de g présente une symétrie par rapport à l'axe (Oy). Par suite on centre l'intervalle d'étude en 0 - c'est-à-dire $[-\pi, \pi]$ - et on réalise l'étude sur "la moitié", autrement dit étude sur $[0, \pi]$ et on complèt le tracé par la symétrie décrite ci-dessus. Ce ci confirme le choix du tableau de variations fourni.
- On précise le détail des points en lesquels sont présentes des tangentes horizontales ou verticales, ceux où l'une seule des dérivées x' ou y' s'annule. Cet aspect est laissé au lecteur.
- Nature des points singuliers. Il en existe deux : un pour $t = 0$, un pour $t = \pi$. Les deux études sont similaires ; nous n'en conduisons qu'une seule, celle en $t = 0$ par exemple.
  En $t = 0$, d'après l'énoncé le premier vecteur dérivé non nul est le second puisque $g^{(2)}(0) = (0, -1)$. Par conséquent, la tangente à la courbe est dirigée par ce premier vecteur dérivé non nul ; sous le vocabulaire du cours : $p = 2$. De plus $g^{(3)}(0) = (-1, 0)$; par conséquent $g^{(3)}(0)$ est non colinéaire à $g^{(2)}(0)$ - cette vérification est indispensable -. Ainsi on obtient $q = 3$ et par suite, le point correspondant est de premier espèce en raison de l'interprétation de la signification géométrique des entiers p et q.
- L'absence de point d'inflexion indique qu'il n'y pas de changement de concavité au niveau des tracés ; c'est un élément crucial pour fournir une bonne allure de courbe.
- La donnée de $g(\pi/6) = g(5\pi/6) = (-1/2, 0)$ prouve l'existence d'un point double qui devra être correctement positionné ; il en existera un second par symétrie par rapport à (Oy).

b. Ensuite alors on peut produire le tracé demandé, à la main comme tout le monde !

Exercice 2

1.

2. **a.** $\|\gamma'(t)\| = e^{at}\sqrt{a^2 + 1}$.



b. Si $a < 0$, $L(\gamma([0,+\infty[) = \int_0^{+\infty} e^{at}\sqrt{a^2+1}dt = \dfrac{-\sqrt{a^2+1}}{a}$. Si $a > 0$ la longueur est infinie, c'est le dessin **1.a**.

c. $k(t) = \dfrac{e^{-at}}{\sqrt{a^2+1}}$, ce qui donne $\lim_{t\to+\infty} k(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } a>0 \\ +\infty & \text{si } a<0 \end{array} \right.$. Si $a = 0$ la courbure est constante égale à 1. La spirale est alors un cercle de rayon 1 c'est le dessin **1.b**.

d. $\dfrac{\gamma(t).\gamma'(t)}{\|\gamma(t)\|\|\gamma'(t)\|} = \frac{a}{\sqrt{a^2+a}}$. Or par définition du produit scalaire on a

$$\gamma(t).\gamma'(t) = \|\gamma(t)\|\|\gamma'(t)\|\cos(\theta)$$

où θ est l'angle entre $\gamma(t)$ et $\gamma'(t)$. Si $a < 0$ le cosinus est négatif et l'angle est supérieur à $\frac{\pi}{2}$, c'est le dessin **1.a**. Si $a = 0$ le cosinus est nul et l'angle entre $\gamma(t)$ et la tangente est égal à $\frac{\pi}{2}$ c'est le cercle, dessin **1.b**. Si $a > 0$ alors $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$, c'est le dessin **1.c**.

Exercice 3

1. $\gamma'(t) = v(t)T(t)$.
2. $\gamma''(t) = v'(t)T(t) + v(t)T'(t) = v'(t)T(t) + v^2(t)k(t)N(t)$.
3. $\gamma^{(3)}(t) = (v''(t) - v^3(t)k^2(t))T(t) + (2v(t)v'(t)k(t) + v^2(t)k'(t) + v'(t)v(t))N(t) - \tau(t)v^3(t)k(t)B(t)$.
4. $\gamma'(t)$ est colinéaire à $T(t)$ (question **1**) donc seule la composante en $T(t)$ de $\gamma''(t) \wedge \gamma^{(3)}(t)$ sera prise en compte dans le calcul (les autres produit scalaire donneront zéro car (T, N, B) est une b.o.n). Or $\gamma''(t) = v'(t)T(t) + v^2(t)k(t)N(t)$, donc seul le produit vectoriel du terme $v^2(t)k(t)N(t)$ (de γ'') et du terme $-\tau(t)v^3(t)k(t)B(t)$ (de $\gamma^{(3)}(t)$) vont donner une composante en $T(t)$ dans le produit $\gamma''(t) \wedge \gamma^{(3)}(t)$. Ce qui donne au final :

$$-\gamma'(t).(\gamma''(t)\wedge\gamma^{(3)}(t)) = -v(t)T(t).[((*)T(t)+v^2(t)k(t)N(t))\wedge((*)T(t)+(*)N(t)-\tau(t)v^3(t)k(t)B(t$$

$$= -v(t)T(t).(-\tau(t)v^5(t)k(t)T(t) + (*)N(t) + (*)B(t)) = \tau(t)v^3(t)k(t).$$

5. D'après le cours $k(t) = \dfrac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} = \dfrac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{v(t)^3}$. Ce qui donne le résultat.
En divisant $-\gamma'(t).(\gamma''(t) \wedge \gamma^{(3)}(t))$ par $\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2$ on obtient alors la torsion.

6. **a.** C'est la troisième équation de Frenet.

b. $(\gamma(t).B(t))' = \gamma'(t).B(t) + \gamma(t).B'(t) = 0 + \gamma(t).B'(t)$. Si $\tau(t) = 0$ cela donne $\gamma(t).B'(t) = 0$ soit $(\gamma(t).B(t))' = 0$ ou encore $\gamma(t).B(t) = \text{const}$. En supposant $\gamma(0).B(0) = 0$ on en déduit que $\gamma(t).B(t) = 0$ ou encore puisque B est constant $\gamma(t).B(0) = 0$. La courbe est contenue dans le plan orthogonal à $B(0)$.

c. $\gamma'(t) = (1, -\frac{1}{t^2}, \frac{-1}{t^2} - 1)$, $\gamma''(t) = (0, \frac{2}{t^3}, \frac{2}{t^3})$ et $\gamma^{(3)}(t) = (0, -\frac{6}{t^4}, -\frac{6}{t^4})$; Or les vecteurs $\gamma''(t)$ et $\gamma^{(3)}(t)$ sont colinéaires donc $\gamma''(t) \wedge \gamma^{(3)}(t) = \overrightarrow{0}$ ce qui donne $\tau(t) = 0$. On en conclut d'après ce qui précède que la courbe est plane.