# MÉDIAN

*La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'attribution de la note. Le barème est donné à titre indicatif. Matériel autorisé : une feuille A4 de notes et la calculatrice.*

*Le sujet comporte deux exercices, merci de rendre* **une copie par exercice**

**Exercice 1 La cardioïde** ( 10 points )

On considère la courbe paramétrée $\gamma$, **reproduite en annexe**, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\gamma(t) = (2\sin(t) - \sin(2t), 2\cos(t) - \cos(2t))$$

**1.** Soit $k(t)$ la courbure de $\gamma$. Prouver que $k(t) = \dfrac{3}{8|\sin(\frac{t}{2})|}$.

Indication : on utilisera les égalités trigonométriques suivantes :
- $\cos(t) - \cos(2t) = 2\sin(\frac{3t}{2})\sin(\frac{t}{2})$
- $\sin(t) - \sin(2t) = -2\sin(\frac{t}{2})\cos(\frac{3t}{2})$.

**2.** Déterminer les équations de la développée de $\gamma$ pour $t \in [0, \pi]$ (on admettra que les équations sont inchangées sur $\mathbb{R}$).

**3.** On note $\alpha$ la développée de $\gamma$ calculée à la question précdente. Le tableau de variation de $\alpha$ est le suivant pour $t \in [0, \pi]$ :

| $t$ | $0$ | | $\frac{\pi}{3}$ | | $\frac{2\pi}{3}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ |
| $y'(t)$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ |
| $x(t)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0.87$ | $\searrow$ | $\frac{\sqrt{3}}{6} \simeq 0.43$ | $\searrow$ | $0$ |
| $y(t)$ | $1$ | $\searrow$ | $\frac{1}{6}$ | $\searrow$ | $-\frac{1}{2}$ | $\nearrow$ | $-\frac{1}{3}$ |

On donne de plus les éléments suivants concernant $\alpha$ :
- $x(t) = -x(-t)$, $y(t) = y(-t)$,
- $\alpha''(\pi) = (0, -\frac{2}{3})$, $\alpha^{(3)}(\pi) = (-2, 0)$.
- $\alpha$ ne possède pas de points d'inflexion.

**a.** Montrer que $\alpha$ est $2\pi$ périodique.

**b.** Représenter soigneusement la courbe $\alpha$, pour $t \in \mathbb{R}$, sur le document fourni en annexe représentant $\gamma$. Vous ferez apparaître les éléments remarquables.

**c.** Justifier sur votre copie toutes les étapes vous permettant d'aboutir au tracé de $\alpha$.

**d.** Quelle est la développée de la cardioïde $\gamma$ ?

**4.** On note $L$ la longueur de $\gamma$.

**a.** Calculer $L$.

**b.** La longueur de $\alpha$ est égale à $\frac{L}{3}$. Proposer une explication.

**5.** Équation intrinsèque **[question bonus]**

**a.** Calculer l'abscisse curviligne $s(t) = \int_\pi^t \|\gamma'(u)\| du$ et montrer que la cardioïde $\gamma$ vérifie $\frac{9}{k(t)^2} + s(t)^2 = 16 \times 2^2$.

**b.** On note $\tilde{k}$ la courbure de $\alpha$. La courbe $\alpha$ vérifie $\frac{9}{\tilde{k}(t)^2} + s(t)^2 = 16 \times (\frac{2}{3})^2$. Proposer une explication.

**Exercice 2 Indicatrice sphérique** ( 10 points )

L'espace est rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe de l'espace régulière, qu'on supposera paramétrée par longueur d'arc.

On note comme dans le cours $(t(s), n(s), b(s))$ le repère de Frenet associé et $k, \tau : I \to \mathbb{R}^3$ représentent les fonctions courbure et torsion de $\gamma$.

Dans cet exercice on s'intéresse à la courbe $\alpha$ définie par $\alpha(s) = \gamma'(s)$. Cette courbe $\alpha$, appelée indicatrice sphérique, est la courbe qui décrit le déplacement du vecteur $t(s)$.

**1.** Calculer $\|\alpha(s)\|$. En déduire que $\alpha$ est une courbe sphérique, plus précisément $\alpha(s) \in S(O, 1)$ où $S(O, 1)$ est la sphère de centre l'origine et de rayon 1.

**2.** Exprimer $\alpha'$, $\alpha''$ dans la base du repère de Frenet.

**3.** Que vaut $\|\alpha'\|$ ? En déduire qu'en général $\alpha$ n'est pas paramétrée par longueur d'arc.

**4.** On note $\tilde{k}$ la courbure de $\alpha$. Prouver que $\tilde{k}(s) = \frac{\sqrt{k^2(s) + \tau^2(s)}}{k(s)}$.

**5.** Calculer $\alpha^{(3)}$ dans le repère de Frenet.

**6.** On note $\tilde{\tau}$ la torsion de $\alpha$. Prouver que $\tilde{\tau}(s) = \frac{\tau'(s)k(s) - k'(s)\tau(s)}{k(s)(k^2(s) + \tau^2(s))}$.

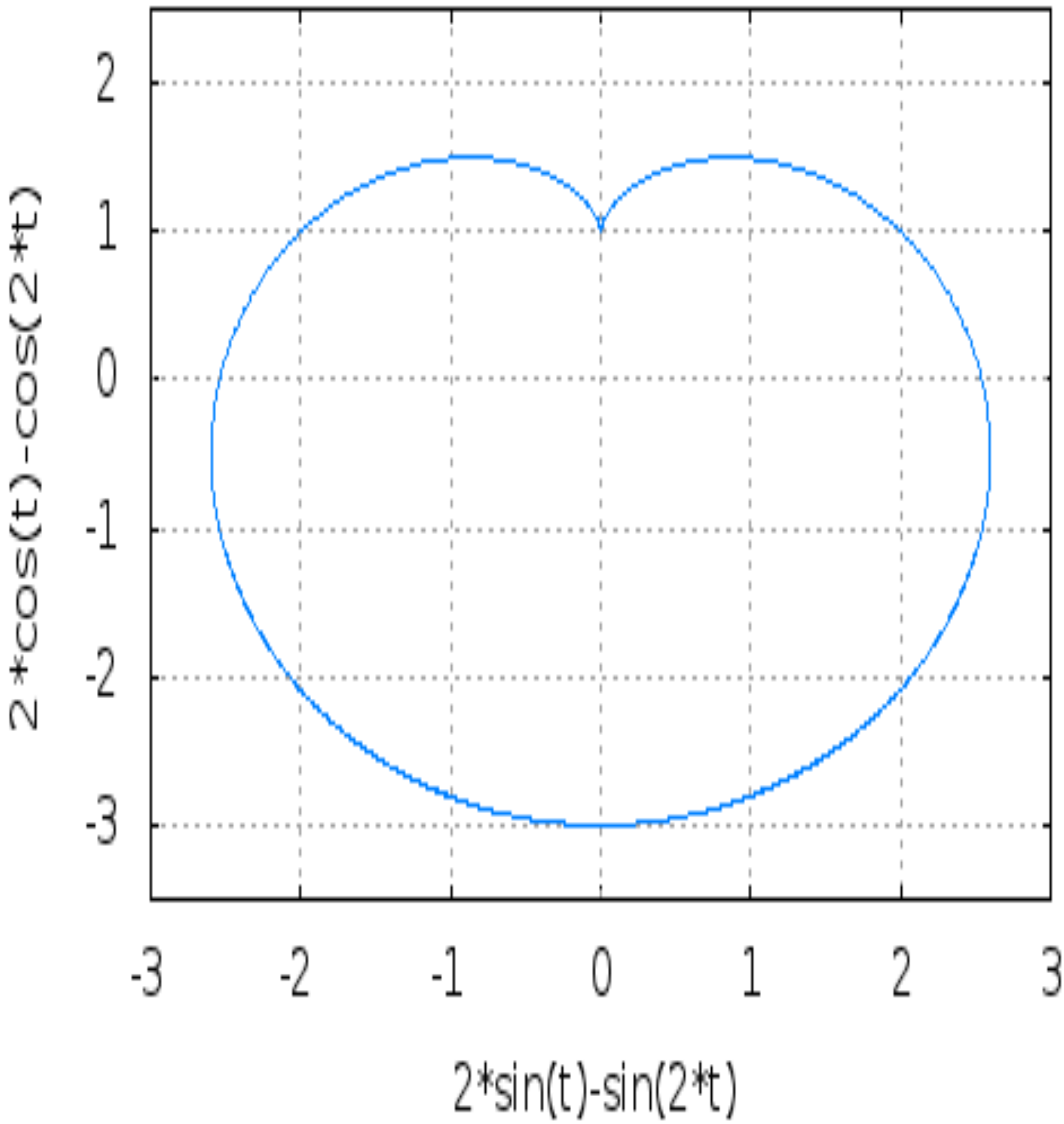
**7.** Application. On suppose dans cette question que $\gamma$ est une hélice.

**a.** Montrer alors que $\tilde{\tau}(s) = 0$ et que $\tilde{k}(s)$ est constant.

**b.** Que peut-on en déduire pour $\alpha$ dans ce cas là ?

**Annexe (à rendre avec votre copie)**

NOM :
PRENOM :



# Correction

## Exercice 1

**barème : 1) 3 points 2) 1,5 points 3 a) 1 point b) 1,5 points c) 1,5 points d) 0,5 point 4) a) 2 points b) 1 point 5) 2 points.**

**1.** On utilise l'expression de la courbure d'une courbe plane $k(t) = \dfrac{|x'y'' - x''y'|}{v^3}$ où $v(t) = \|\gamma'(t)\|$.
À l'aide des indications on obtient $\gamma'(t) = (4\sin(\frac{3t}{2})\sin(\frac{t}{2}), 4\sin(\frac{t}{2})\cos(\frac{3t}{2}))$. D'où d'une par $v(t) = \sqrt{(4\sin(\frac{3t}{2})\sin(\frac{t}{2}))^2 + (4\sin(\frac{t}{2})\cos(\frac{3t}{2})))^2} = \sqrt{16\sin^2(\frac{t}{2})} = 4|\sin\frac{t}{2}|$.
Calculons $\gamma''$ :

$$\gamma''(t) = (6\cos(\frac{3t}{2})\sin(\frac{t}{2}) + 2\sin(\frac{3t}{2})\cos(\frac{t}{2}), 2\cos(\frac{t}{2})\cos(\frac{3t}{2}) - 6\sin(\frac{3t}{2})\sin(\frac{t}{2}))$$

D'où $x'y'' - y'x'' = 8\cos(t/2)\cos(3t/2)\sin(3t/2)\sin(t/2) - 24\sin^2(t/2)\sin^2(3t/2) - 24\cos^2(3t/2)\sin^2(t/2) - 8\cos(t/2)\cos(3t/2)\sin(3t/2)\sin(t/2) = -24\sin^2(t/2)$.
On obtient alors

$$k(t) = \frac{24\sin^2(t/2)}{4|\sin(t/2)|^3} = \frac{24}{64} \times |\frac{\sin^2(t/2)}{\sin^3(t/2)}| = \frac{3}{8|\sin(t/2)|}$$

**Remarque.** On pouvait aussi utiliser l'expression donnée dans le polycopié (non démontrée en cours mais que certain ont su utiliser avec efficacité) $k(t) = \dfrac{\|T'(t)\|}{\|\gamma'(t)\|}$. Pour cela il fallait d'abord calculer $T(t) = \dfrac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \begin{pmatrix} \sin(3t/2) \\ \cos(3t/2) \end{pmatrix}$ (voit question suivante) puis $T'(t) = \dfrac{3}{2}\begin{pmatrix} \cos(3t/2) \\ -\sin(3t/2) \end{pmatrix}$ d'où $\|T'(t)\| = \dfrac{3}{2}$ et enfin $k(t) = \dfrac{3/2}{4|\sin(t/2)|}$.

**2.** Par définition $\alpha(t) = \gamma(t) + \dfrac{1}{k(t)}N(t)$. On détermine $N(t)$ à partir de $T(t)$. Le vecteur tangent est défini par $T(t) = \dfrac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \dfrac{1}{v(t)}\gamma'(t) = \dfrac{1}{4|\sin\frac{t}{2}|}\begin{pmatrix} 4\sin(\frac{t}{2})\sin(\frac{3t}{2}) \\ 4\sin(\frac{t}{2})\cos(\frac{3t}{2}) \end{pmatrix}$.
Puisqu'on se restreint à $[0,\pi]$ on a $\sin(\frac{t}{2}) \geqslant 0$ donc $T(t) = \begin{pmatrix} \sin(3t/2) \\ \cos(3t/2) \end{pmatrix}$. Le vecteur normal étant orthogonal à $T$ dans le plan on a $N(t) = \pm\begin{pmatrix} -\cos(3t/2) \\ \sin(3t/2) \end{pmatrix}$.

À partir du dessin fourni en annexe, on voit que sur $[0,\pi]$ le vecteur normal a une ordonnée négative sur $[0,2\pi/3]$ donc $N(t)=\begin{pmatrix}\cos(3t/2)\\-\sin(3t/2)\end{pmatrix}$. On en déduit que

$$\alpha(t)=\begin{pmatrix}2\sin(t)-\sin(2t)+\frac{8}{3}\sin(\frac{t}{2})\cos(\frac{3t}{2})\\2\cos(t)-\cos(2t)-\frac{8}{3}\sin(\frac{t}{2})\sin(\frac{3t}{2})\end{pmatrix}$$

**3.** Étude de la courbe $\alpha$.

**a.** Par définition $\alpha(t)=\gamma(t)+\dfrac{1}{k(t)}N(t)$. Or $\gamma$ est $2\pi$ périodique donc les fonctions $k$ et $N$ qui dépendent uniquement de $\gamma$ le sont égalemement. Donc $\alpha$ est $2\pi$-périodique.

**b.** Le dessin doit faire apparaître les tangentes remarquables (horizontales, verticales), le point singulier (et sa tangente) et être conforme au tableau de variations.

**c.** $\alpha$ est $2\pi$-périodique, il suffit donc de représenter $\alpha([-\pi,\pi])$. Or $\alpha(t)=\alpha(-t)$ on complète donc le tracé de $\alpha([0,\pi])$ par symétrie d'axe $(Ox)$. Le tableau de variation permet de placer une tangente horizontale en $\alpha(0)=(0,1)$ et en $\alpha(2\pi/3)\approx(0.43,-0.5)$ ainsi qu'un tangente verticale en $\alpha(\pi/3)\approx(0.87,1/6)$. Enfin il y a un point de rebroussement de première espèce en $t=\pi$ au point $(0,-1/3)$ de tangente verticale.

**d.** La développée de $\gamma$ est une cardioïde.

**4.** Longueur.

**a.** La courbe étant symétrique on peut calculer la longueur sur $[0,\pi]$ et multiplier par 2.

$$L=2\int_0^\pi\|\gamma'(t)\|dt=2\int_0^\pi 4|\sin(\frac{t}{2})|dt=8\int_0^\pi\sin(t/2)dt=8[-2\cos(t/2)]_0^\pi=16$$

**b.** La représentation graphique de $\alpha$ suggère que $\alpha$ est une réduction de $\gamma$ par un facteur $\frac{1}{3}$. En fait c'est l'image par une homothetie de centre $O$ et de rapport $-\frac{1}{3}$. Donc la longueur de $\alpha$ doit être $1/3$ de celle de $\gamma$.

**5. [question bonus]**

**a.** Un calcul direct donne $s(t)=-8\cos(t/2)$ ce qui montre bien que $\frac{9}{k^2(t)}+s^2(t)=64=16\times 2^2$.

**b.** L'équation précédente est une équation intrinsèque qui caractérise $\gamma$. Puisque $\alpha$ est aussi une cardioïde elle doit satisfaire une équation similaire. Un des paramètres de cette équation doit rendre compte du fait que $\alpha$ soit une réduction par un facteur $\frac{1}{3}$. L'énoncé fait bien apparaître un tel paramètre $(2/3)^2$ qui remplace $2^2$. Plus précisément on pourrait démontrer qu'une cardioïde est définie par l'équation intrinsèque

$$\frac{9}{k^2}+s^2=16a^2$$

où $a$ est deux fois la distance entre $O$ et le point singulier de la cardioïde.

**Exercice 2**

**barème : 1) 1,5 points 2) 1,5 points 3) 1 point 4) 2 points 5) 2 points 6) 2 points 7) 2 points**

1. Par définition $\|\alpha(s)\| = \|\gamma'(s)\| = 1$ car $\gamma$ est paramétrée par longueur d'arc.

2. On utilise à chaque apparition d'une dérivée d'un vecteur du repère de Frenet, les équations du même nom : $\alpha(s) = t(s)$ donc $\alpha'(s) = t'(s) \Leftrightarrow \alpha' = k(s)n(s)$ c'est-à-dire dans la base $(t(s), n(s), b(s))$ on a $\alpha'(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 0 \end{pmatrix}$. On dérive à nouveau $\alpha''(s) = k'(s)n(s) + k(s)n'(s) = k'(s)n(s) + k(s)(-k(s)t(s) - \tau(s)b(s)) = -k^2(s)t(s) + k'(s)n(s) - k(s)\tau(s)b(s)$. Autrement dit dans la base $(t(s), n(s), b(s))$ on a $\alpha''(s) = \begin{pmatrix} -k^2 \\ k' \\ -k\tau \end{pmatrix}$.

3. D'après ce qui précède $\|\alpha'(s)\| = k(s) \neq 1$, donc $\alpha$ n'est pas paramétrée par longueur d'arc.

4. Comme $\alpha$ n'est pas paramétrée par longueur d'arc, sa courbure s'obtient comme
$$\tilde{k}(s) = \frac{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|}{\|\alpha'(s)\|^3}$$
D'après la question **2.** on a $\alpha'(s) \wedge \alpha''(s) = k(s)n(s) \wedge (-k^2(s)t(s) + k'(s)n(s) - k(s)\tau(s)b(s)) = k^3(s)b(s) - k^2(s)\tau(s)t(s)$. La base $(t(s), n(s), b(s))$ étant orthonormée on obtient directement la norme à partir du carré des composantes
$$\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\| = \sqrt{(k^3(s))^2 + (-k^2(s)\tau(s))^2} = k^2(s)\sqrt{k^2(s) + \tau^2(s)}$$
Par ailleurs $\|\alpha'(s)\|^3 = k(s)^3$ d'où $\tilde{k}(s) = \dfrac{k^2(s)\sqrt{k^2(s) + \tau^2(s)}}{k^3(s)} = \dfrac{\sqrt{k^2(s) + \tau^2(s)}}{k(s)}$

5. Pour les calculs de la dérivée $\alpha^{(3)}$ on omettra la référence à la variable $s$ mais celle-ci sera sous-entendue. Dérivons $\alpha''$ :
$\alpha^{(3)} = (-k^2t + k'n - k\tau b)' = -2kk't - k^2t' + k''n + k'n' - k'\tau b - k\tau' b - k\tau b'$
Avec les équations de Frenet on obtient
$\alpha^{(3)} = -2kk't - k^3n + k''n + k'(-kt - \tau b) - k'\tau b - k\tau b - k\tau^2 n = -3kk't + (-k^3 + k'' - \tau^2 k)n + (-2\tau k' - \tau' k)b$.
Autrement dit dans la base $(t(s), n(s), b(s))$, $\alpha^{(3)} = \begin{pmatrix} -3kk' \\ -k^3 + k'' - \tau^2 k \\ -2\tau k' - \tau' k \end{pmatrix}$.

6. Calculons la torsion $\tau(s) = -\dfrac{\alpha'(s).(\alpha''(s) \wedge \alpha^{(3)}(s))}{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|^2}$. Le calcul de $\alpha'' \wedge \alpha^{(3)}$ donne

$\alpha'' \wedge \alpha^{(3)} = \begin{pmatrix} -k^2 \\ k' \\ -k\tau \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -3kk' \\ -k^3 + k'' - \tau^2 k \\ -2\tau k' - \tau' k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ** \\ -2\tau k' k^2 - \tau' k^3 + 3k^2 k' \tau \\ ** \end{pmatrix}$ il est inutile de calculer les composantes en $t(s)$ et $b(s)$ car $\alpha'$ est colinéaire à $n$ et donc

$$-\alpha'.(\alpha'' \wedge \alpha^{(3)}) = -\begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} ** \\ -\tau' k^3 + k^2 k' \tau \\ ** \end{pmatrix} = \tau' k^4 - k^3 k' \tau = k^3(\tau' k - \tau k')$$

Or d'après **4**

$$\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|^3 = k^4(s)(k^2(s) + \tau^2(s))$$

d'où

$$\tau(s) = \frac{k^3(s)(\tau'(s)k(s) - \tau(s)k'(s))}{k^4(s)(k^2(s) + \tau^2(s))} = \frac{\tau'(s)k(s) - \tau(s)k'(s)}{k(s)(k^2(s) + \tau^2(s))}$$

**7.** Application.

**a.** Si $\gamma$ est une hélice alors $k(s) = k$ et $\tau(s) = \tau$ sont des constantes. Donc en utilisant les expressions calculées pour $\tilde{k}$ et $\tilde{\tau}$ on obtient $\tilde{k} = \dfrac{\sqrt{k^2 + \tau^2}}{k}$ et $\tilde{\tau} = 0$.

**b.** Dans ce cas $\alpha$ est une courbe sphérique (question **1**), planaire ($\tilde{\tau} = 0$) et de courbure constante ($\tilde{k} = \text{cte}$). On en déduit que $\alpha$ est une portion de cercle sur une sphère, c'est-à-dire une portion de l'intersection de la sphère $S(O, 1)$ avec un plan.