MT 26 — Final Automne 06

Mardi 16 janvier 2007

Matériel autorisé: uniquement une feuille aide-mémoire A4 recto

Les deux parties doivent être rendues sur deux feuilles séparées

I. Première partie (2 + 5 + 3 points)

1°) Petit exercice d'échauffement :

a) Calculer le rayon de convergence et la somme de la série entière : $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$

b) Une fonction f continue de période T = 2π égale à x² sur]-π,+π] a pour développement de Fourier : $f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$. Calculer les sommes $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

2°) Soit la fonction f, de période 2π définie par $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, \pi[\\ 0 & \text{si } x \in [\pi, 2\pi[\end{cases}$.

a) Représenter graphiquement cette fonction.

b) Calculer les coefficients de Fourier de f, et écrire la somme de Fourier.

c) En déduire le calcul de :

$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ puis les sommes $S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$, $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ et $S_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

d) Pour n∈ N, calculer les valeurs de $\left((-1)^n - 1\right)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ puis $(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$. En déduire aussi la somme $S_4 = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$.

e) Montrer que $\forall x \in]-\pi,+\pi[\;\; f(x) = \left|\frac{x}{2}\right| + \frac{x}{2}$. En déduire les développements en série de Fourier des fonctions p et i périodiques de période 2π telles que : $\forall x \in]-\pi,+\pi] \;\; p(x) = \left|\frac{x}{2}\right|$ et $i(x) = \frac{x}{2}$. (Ne pas refaire tous les calculs).

3°) Soit la fonction f définie par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \quad f(x,y) = xy(2x + y - 6)$.

a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f.

b) Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer son polynôme caractéristique et montrer que ses deux valeurs propres sont positives (il n'est pas indispensable de les calculer effectivement).

c) En déduire l'existence d'un minimum ou d'un maximum de f sur le quart de plan ouvert $\{x > 0, y > 0\}$.

Rappel : rendre la deuxième partie sur une nouvelle copie

II. Seconde partie (4 + 6 + 3 points)

1°) Développement en série entière de Arcsin x et approximation de π :

a) Soit la fonction g définie sur $]-1, +1]$ par : $g(x) = (1+x)^{\alpha}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculer ses dérivées successives $g^{(n)}(x)$ et en déduire $g^{(n)}(0)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

b) En déduire le développement en série entière de la fonction g.

c) A l'aide des opérations usuelles (dérivation, intégration, changement de variable, …) en déduire le développement en série entière de f(x) = Arcsin x.

d) Soit la série entière $S(x) = \sum_{n=0\infty}^{\infty} u_n x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2n+1)2^{2n}(n!)^2} x^{2n+1}$. Déterminer un équivalent de u_n en $+\infty$, le rayon de convergence de la série entière. S est-elle convergente en 1 ?

e) Montrer que $S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ et $S(1) = \frac{\pi}{2}$. En déduire l'écriture de π sous forme de somme de série.

f) Quel calcul $S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ ou $S(1) = \frac{\pi}{2}$ serait le plus efficace pour calculer une approximation de π ?

Ne pas passer beaucoup de temps sur cette question f), donner simplement une justification en une ligne.

2°) Soit l'équation différentielle (E) $x\,y'' + 2\,y' + x\,y = 0$ et les intervalles $I_1 =]\,0\,, +\infty[$ et $I_2 =]-\infty\,, 0\,[$.

a) Déterminer une fonction développable en série entière au voisinage de 0 solution de l'équation (E). En calculer une forme explicite.

b) Montrer que la fonction $g : x \to g(x) = \frac{\cos x}{x}$ est solution de (E) sur les intervalles I_1 et I_2.

c) En déduire la solution générale se (E) sur chacun des intervalles I_1 et I_2, puis la solution f vérifiant $\lim_{x \to 0} f = 1$ et $\lim_{x \to 0} f' = 0$.

3°) Soit la forme différentielle ω définie sur $\mathbb{R}^3$ par : $\omega = P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz$ avec $P = 4\,x\,y + y^2 - 6y\,z^2$ $Q = 2\,x^2 + 2\,xy - 6\,x\,z^2$ et $R = -12\,xyz + 2z$.

a) Calculer les expressions : $\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}$ et $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}$.

b) En déduire l'existence et le calcul d'une fonction $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que $dF = \omega$ et F(0, 0, +1) = 0.

Quelques résultats pouvant être utilisés dans les calculs :

Formule de Stirling : $n! \underset{n\to\infty}{\approx} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$, $\left(\text{Arc}\sin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha\, x^{\alpha-1}$, $\text{Arc}\sin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

aujourd'hui = mardi 16 janvier 2007 1 € = $ 1,287 Arcsin 0 = 0

N'oubliez pas de faire quelques étirements après cette (dure) épreuve !

La valeur de performance d'une idée tient à la modification de comportement qu'elle apporte à l'individu ou au groupe qui l'adopte.

Jacques MONOD (1910 - 1976)

MT 26 Final 16 janvier 2007 - CORRIGÉ -

PREMIÈRE PARTIE

1°) a) $\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}$ et S ont le même rayon de CV. Si $y=x^2$, $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}y^n$ a pour rayon de cv $R_y=1$

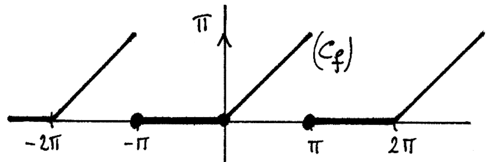
donc Rayon de CV de S : $R_x = 1$

$|x|<1$; $S'(x) = \left(\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\right)' = \sum_0^\infty (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow S(x) = \int_0^x \sum (-1)^n t^{2n}\,dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \text{Arctan}\, x = S(x)$

b) $f(0)=0=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n^2} \Rightarrow \sum_1^\infty\frac{(-1)^n}{n^2} = \frac14\left(-\frac{\pi^2}{3}\right) \Rightarrow S_1 = \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$

Égalité de Parseval : $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2)^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^5}{5}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^4}{5} = \left(\frac{\pi^2}{3}\right)^2 + \frac12 16\sum_1^\infty \frac{1}{n^4} \Rightarrow \sum_1^\infty \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} = S_2$

2°) a) représentation graphique :



b) Coefficients de Fourier :

$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi x\,dx = \frac{\pi}{4} = a_0$

$n>0$ $a_n = \frac1\pi \int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac1\pi\int_0^\pi x\cos nx\,dx = \frac1\pi\left(\overset{0}{\cancel{\left[\frac{x\sin nx}{n}\right]_0^\pi}} - \int_0^\pi \frac{\sin nx}{n}\,dx\right) = \frac1\pi\left[\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^\pi = \frac{(-1)^n-1}{\pi n^2} = a_n$

$b_n = \frac1\pi\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac1\pi\int_0^\pi x\sin nx\,dx = \frac1\pi\left(\left[-\frac{x\cos nx}{n}\right]_0^\pi + \int_0^\pi\frac{\cos nx}{n}\,dx\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{n} = b_n$

$\hat f(x) = \frac\pi4 + \sum_{n=1}^\infty\left(\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}\cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right)$ avec $f(x)=\hat f(x)$ sur $\mathbb R \setminus \{(2k+1)\pi, k\in\mathbb Z\}$

c) $f(0)=0 = \frac\pi4 + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n-1}{\pi n^2} = \frac\pi4 + \sum_{p=0}^\infty \frac{-2}{(2p+1)^2\pi} \Rightarrow \boxed{S_1 = \sum_{p=0}^\infty \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$

$\begin{cases} S = S_1+S_2 \\ S_2 = \frac14 S\end{cases} \Rightarrow S = S_1 + \frac14 S \Rightarrow S = \frac43 S_1 = \frac43\cdot\frac{\pi^2}{8} \Rightarrow S = \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \Rightarrow S_2 = \frac{\pi^2}{24}$

$S = S_1+S_2$ et $S_3 = -S_2 + S_1 = -\frac{\pi^2}{24}+\frac{\pi^2}{8} = \boxed{+\frac{\pi^2}{12} = S_3}$ (Conforme à 1°) b))

d) $n\in\mathbb N$ n impair $\Rightarrow \cos n\frac\pi2 = 0$; n pair $\Rightarrow (-1)^n - 1 = 0$ $\Big\}$ $\forall n\ ((-1)^n-1)\cos n\frac\pi2 = 0$ n impair $= 2p+1$ $(-1)^{2p+2}\sin(2p+1)\frac\pi2 = (-1)^p$; n pair $\sin 2p\left(\frac\pi2\right) = 0$

donc $\hat f\left(\frac\pi2\right) = f\left(\frac\pi2\right) = \frac\pi2 = \frac\pi4 + \sum_{p=0}^\infty\frac{(-1)^p}{2p+1} \Rightarrow \sum_0^\infty \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac\pi4 = S_4$

e) sur $[0,\pi[$ $f(x) = x = \frac x2+\frac x2 = \left|\frac x2\right| + \frac x2$, sur $[-\pi,0[$ $f(x) = 0 = -\frac x2 + \frac x2 = \left|\frac x2\right|+\frac x2$

donc, comme $T=2\pi$ $f(x) = p(x)+i(x)$ (p paire et i impaire)

donc p est la partie paire de f et $\hat p(x) = \frac\pi4+\sum_1^\infty \frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}\cos nx$ et $\hat i(x) = \sum_1^\infty\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$

3°) $f(x,y) = xy(2x+y-6) = 2x^2y+xy^2-6xy$

a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy+y^2-6y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2+2xy-6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 4x+2y-6$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x$

b) $M = \begin{pmatrix}8&2\\2&2\end{pmatrix}$ $P_M(\lambda) = \begin{vmatrix}8-\lambda & 2\\ 2 & 2-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2-10\lambda+12$

Valeurs propres λ_1 et λ_2 vérifient $\lambda_1+\lambda_2 = 10$ et $\lambda_1\lambda_2=12$ donc de même signe, positives.

c) Points possibles pour un extremum (avec $x>0$ et $y>0$) $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4xy+y^2=6y\\2x^2+2xy=6x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x+y=6\\2x+2y=6\end{cases}$

Solution unique $(x=1,\ y=2)$

au voisinage de $(1,+2)$ $df = \frac12\left(\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2)}_{=8}h^2 + 2\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,2)}_{=2}hk + \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,2)}_{=2}k^2\right) + o(h^2+k^2)$ $(h,k)\in V_{(0,0)}$

donc $df = (h\ k)\begin{pmatrix}8&2\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}$ avec deux valeurs propres >0 $\Rightarrow$ minimum en $(1,+2)$

SECONDE PARTIE

1°) a) $g(x) = (1+x)^\alpha \quad g'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \quad \dots \quad g^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$

$g(0) = 1 \quad g'(0) = \alpha \quad g^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)$

donc (Dev^t de Taylor) $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_0^\infty \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$ (Rayon de convergence $R=1$)

b) $(\mathrm{Arcsin}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \dots + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\dots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} x^n + \dots \Rightarrow (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\dots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} x^{2n}$

$\mathrm{Arcsin}\, 0 = 0 \Rightarrow \mathrm{Arcsin}\, x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-\frac{1}{2})\dots(-\frac{1}{2}-n+1)}{(2n+1)\; n!} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\times 3\times 5\times\dots\times(2n-1)}{2^n (2n+1)\, n!} x^{2n+1} = \sum v_n x^{2n+1}$

c) $v_n = \frac{(2n\cancel{+1})!}{2^n\, 2\times 3\times\dots\times(2n)\; n!\,(2n+1)} = \frac{(2n)!}{(2n+1)\, 2^{2n} (n!)^2} = u_n$

Equivalent de u_n (Stirling) $u_n \underset{\infty}{\sim} \frac{(2n)^{2n} e^{-2n}\sqrt{4\pi n}}{(2n+1)\, 2^{2n} (e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n})^2} \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}\, n\sqrt{n}} = \omega_n$

donc $\sum |u_n| x^n$ et $\sum |\omega_n| x^n$ de m̂ nature $\Rightarrow R = 1$ et absolument cv sur $[-1,+1] \Rightarrow \sum u_n$ CV en 1

d) $S(\frac{1}{2}) = \mathrm{Arcsin}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ et (S cv en $+1$) $S(1) = \mathrm{Arcsin}\, 1 = \frac{\pi}{2}$

e) $S(\frac{1}{2})$ converge beaucoup plus vite (presque géométrique $q = \frac{1}{2}$) $\Rightarrow$ plus efficace que $S(1)$

donc $\pi = 6\, S(\frac{1}{2}) = 6 \sum_0^\infty \frac{(2n)!}{(2n+1)\, 2^{2n} (n!)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$

2°) a) $xy'' + 2y' + xy = 0 \quad xy = \sum_0^\infty a_n x^{n+1},\ 2y' = \sum 2n a_n x^{n-1},\ xy'' = \sum_2^\infty n(n-1)\, x^{n-1}$

terme en x^0 : $2a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$

— x^1 : $a_0 + 4a_2 + 2a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = -\frac{1}{6} a_0$

$\vdots$

x^n : $a_{n-1} + 2(n+1) a_{n+1} + n(n+1) a_{n+1} = 0 \Rightarrow a_{n+1} = -\frac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}$

$\forall n = 2p+1 \quad a_n = 0$

$\forall n = 2p \quad a_{2p} = \frac{(-1)^n a_0}{(2p+1)!}$

Solution (par exemple pour $a_0 = 1$) $y = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p}$ mais on sait que $\sum_0^\infty \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p+1} = \sin x$

donc une solution est : $y = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$

b) $g(x) = \frac{\cos x}{x}$ (non définie en 0) est solution de E (vérification facile)

c) $W\left(\frac{\cos x}{x}, \frac{\sin x}{x}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\cos x}{x} & \frac{\sin x}{x} \\ \left(\frac{\cos x}{x}\right)' & \left(\frac{\sin x}{x}\right)' \end{vmatrix} \neq 0$ sur I_1 et sur $I_2 \Rightarrow$ Solution générale $y = \frac{\lambda \cos x + \mu \sin x}{x}$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$

$\lim_0 y$ n'existe que si $\lambda = 0$, et alors $\lim_0 y = 1 \Rightarrow \mu = 1$ et $y = \frac{\sin x}{x}$

$y' = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{x(1 - \frac{x^2}{2}) - x + o(x^2)}{x^2} \xrightarrow{x \to 0} 0$ donc $\boxed{y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}}$

3°) a) Toutes les expressions sont nulles (calcul facile) $\Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{rot}}(P,Q,R) = \vec{0}$ (forme exacte)

donc $\exists F\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que $\frac{\partial F}{\partial x} = P$, $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$ et $\frac{\partial F}{\partial R} = R$

$\frac{\partial F}{\partial x} = P = 4xy + y^2 - 6yz^2 \Rightarrow F = 2x^2 y + xy^2 - 6xyz^2 + \varphi_1(y,z) \quad \varphi_1\ \mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$

$\frac{\partial F}{\partial y} = Q = 2x^2 + 2xy - 6xz^2 \overset{\frac{\partial}{\partial y}}{=} 2x^2 + 2xy - 6xz^2 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0 \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2(z)$

$\frac{\partial F}{\partial z} = R = -12xyz + 2z = -12xyz + \varphi_2(z) \Rightarrow \varphi_2(z) = 2z \Rightarrow \varphi_2(z) = z^2 + C$

donc $F(x,y,z) = 2x^2 y + xy^2 - 6xyz^2 + z^2 + C$ avec $C = -1$ pour $F(0,0,1) = 0$