le 24 Janvier 2012

UTBM MT26

Final automne 2011

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est **une feuille A4 recto-verso rédigée à la main**

Chaque partie doit être rédigée sur une feuille différente

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

PREMIERE PARTIE.

Exercice 1

Soit f la fonction 2π périodique définie sur $]-\pi,\pi]$ par

$$f(x)=\begin{cases} 1 & si\ \ |x|\leq 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. *Tracer la représentation graphique de f sur $[-2\pi,2\pi]$.*
2. *Justifier que f est développable en série de Fourier, puis calculer ce développement $\widehat{f}(x)$.*
3. *Cette série converge-t-elle sur $\mathbb{R}$? Vers quelle fonction ? La convergence est-elle uniforme ? Justifier.*
4. *Calculer* $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\sin n}{n}$.
5. *Calculer* $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\sin^2 n}{n^2}$.

TOURNER LA PAGE SVP

DEUXIEME PARTIE : NOUVELLE FEUILLE.

Exercice 2

Déterminer les **intervalles** *de convergences des séries entières suivantes.*

1. $S_1 = \sum_{n\geq 0}(-2)^n.\frac{n!}{n^n}.x^n$,
2. $S_2 = \sum_{n\geq 0}\frac{n}{2^n}.x^{2n}$.
3. $S_3 = \sum_{n\geq 1}\frac{\sin(n)}{n^n.\ln(n+1)}.x^n$,

Exercice 3

1. *Trouver les solutions développables en série entière de l'equation différentielle :*

$$xy'' - xy' - y = 0.$$

2. *Reconnaître ces solutions.*
3. *A-t-on toutes les solutions de l'équation différentielle ? Justifier.*

RAPPEL :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Egalité de Parseval : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, T périodique. Alors

$$\frac{1}{T}\int_0^T (f(x))^2 dx = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}.$$

Formule de Stirling : $n! \sim_{n\to+\infty} \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$.