Final MT26, Automne 2014

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation de la copie.
Le barême, donné à titre indicatif, est susceptible de modification.
Aucun document n'est autorisé pour l'épreuve. Les calculatrices sont interdites.
Les deux parties sont à rédiger sur des copies différentes.

Exercice 1 : Séries entières (10 points)

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :

$$\text{(a)} \quad \sum \frac{z^n}{(2n)!} \qquad\qquad \text{(b)} \quad \sum \frac{z^n}{n^{n+1}} \qquad\qquad \text{(c)} \quad \sum \frac{n^n}{n!}\, z^{2n}$$

2. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \int_0^x \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$$

a. Calculer le développement en série entière en zéro de la fonction $t \mapsto \cos(t^2)$.

b. En déduire le développement en série entière en zéro de la fonction f.

3. On pose, pour tout nombre réel x,

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$$

a. Déterminer le développement en série entière de la fonction $\cosh$.

b. On suppose que $x \geqslant 0$. En remarquant que $x = \left(\sqrt{x}\right)^2$, exprimer $g(x)$ à l'aide de la fonction $\cosh$.

c. On suppose que $x < 0$. En remarquant que $x = -\left(\sqrt{-x}\right)^2$, exprimer $g(x)$ à l'aide de la fonction $\cos$.

On rappelle que les fonctions exponentielle et cosinus sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$ *et que pour tout nombre réel* x,

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\ , \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n}\ , \text{ et} \qquad \cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

Veuillez rédiger ces deux exercices sur une nouvelle copie.

Exercice 2 : Séries de Fourier (4 points)

Dans cet exercice, α désigne un réel appartenant à l'intervalle $]0, \pi[$. On note f la fonction 2π-périodique définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, telle que :

$$\begin{cases} f(t) = 1 & \text{pour } t \in [-\alpha, \alpha], \\ f(t) = 0 & \text{pour } t \in]\alpha, \pi], \text{ ou pour } t \in]-\pi, -\alpha[. \end{cases}$$

1. Calculer le développement en série de Fourier de la fonction f.

2. Énoncer le théorème de Parseval (avec ses hypothèses), et calculer la valeur de la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2}.$$

Exercice 3 : Séries de fonctions (6 points)

Pour $x \geqslant 0$, et $n \geqslant 1$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x}{\sqrt{n}(x+n)}$.

1. Montrer que la série de fonctions de terme général f_n est simplement convergente sur $\mathbb{R}^+$. On note f sa somme.

2. Montrer que pour tout réel M strictement positif, la série de fonctions de terme général f_n est normalement convergente sur $[0, M]$. Est-elle normalement convergente sur $\mathbb{R}^+$?

3. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$, et qu'elle est dérivable et croissante sur $[0, +\infty[$.

4. Soient $n \geqslant 1$, et $x_0 \geqslant n$. Montrer que

$$f(x_0) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$

En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

5. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

1. **a.** Pour tout nombre réel r positif, on sait que $r^n \underset{(n\to+\infty)}{=} o\big((2n)!\big)$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{r^n}{(2n)!} = 0$ et la suite $\left(\frac{r^n}{(2n)!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour tout réel $r \geqslant 0$.

Ainsi le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{z^n}{(2n)!}$ est $\boxed{R_1 = +\infty}$.

b. Soit r un réel strictement positif.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{r^n}{n^{n+1}} = \frac{1}{n}\left(\frac{r}{n}\right)^n = \frac{1}{n}\mathrm{e}^{n\,\ln\left(\frac{r}{n}\right)}$ avec $n\,\ln\left(\frac{r}{n}\right) \underset{(n\to+\infty)}{\longrightarrow} -\infty$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{r^n}{n^{n+1}} = 0$ et la suite $\left(\frac{r^n}{n^{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour tout réel $r > 0$.

Ainsi le rayon de convergence de la série entière ; $\sum \frac{z^n}{n^{n+1}}$ est $\boxed{R_2 = +\infty}$.

c. On pose $\forall (n,z) \in \mathbb{N}\times\mathbb{C},\ u_n(z) = \frac{n^n}{n!}\,z^{2n}$.

Alors $\forall (n,z) \in \mathbb{N}^*\times\mathbb{C}^*,\ \left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\,|z|^{2n+2} \times \frac{n!}{n^n}\,|z|^{2n}$
$= \frac{(n+1)^n}{n^n}\,|z|^2 = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\,|z|^2 = \mathrm{e}^{n\,\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\,|z|^2$

Or on sait que $\ln(1+x) \underset{(x\to0}{\sim} x$ d'où par composée, $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{(n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

donc $n\,\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{(n\to+\infty)}{\longrightarrow} 1$ puis $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{n\,\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e$

et enfin $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| \underset{(n\to+\infty)}{\longrightarrow} |z|^2\,e$

D'après la **règle de d'Alembert**,

– Si $|z|^2\,e > 1$ c.à.d si $|z| > \frac{1}{\sqrt{e}}$, alors la série $\sum |u_n(z)|$ diverge.

– Si $|z|^2\,e < 1$ c.à.d si $|z| < \frac{1}{\sqrt{e}}$, alors la série $\sum |u_n(z)|$ converge.

Ainsi le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{n^n}{n!}\,z^{2n}$ est $\boxed{R_3 = \dfrac{1}{\sqrt{e}}}$.

2. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^x \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$

a. La fonction $u\ :\ t \longmapsto \cos(t^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction f est l'unique primitive de u sur $\mathbb{R}$, qui s'annule en 0. Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{f'(x) = u(x) = \cos(x^2)}$.

b. On sait que, pour tout réel x, $\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\,x^{2n}$

D'où $\forall t \in \mathbb{R},\ u(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\,\left(t^2\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\,t^{4n}$.

$\sum \frac{(-1)^n}{(2n)!}\,t^{4n}$ est une série entière de variable réelle t et de de rayon de convergence $R = +\infty$. On peut donc l'intégrer terme à terme :

$\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^x u(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\,\int_0^x t^{4n}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\,\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$

$$\text{c'est-à-dire } \forall x \in \mathbb{R},\ \boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+1)\,(2n)!}\,x^{4n+1}}$$

3. $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$

On a vu à la question 1.(a), que la série $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$ était convergente pour tout réel x. La fonction g est bien définie sur $\mathbb{R}$.

a. Soit $x \in \mathbb{R}$, x fixé. Par définition, $\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)$.

Or $\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ et $\mathrm{e}^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$.

Donc $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n!} + \frac{(-1)^n}{n!}\right) x^n = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2}{(2p)!} x^{2p}$

Puis $\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right) = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2}{(2p)!} x^{2p}$.

Finalement

$$\boxed{\cosh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}}$$

b. On suppose que $x \geqslant 0$.

$g(x) = g\left(\sqrt{x}^2\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{x}^2\right)^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{x}\right)^{2n}}{(2n)!} = \boxed{\cosh(\sqrt{x})}$

c. On suppose que $x < 0$.

$g(x) = g\left(-\sqrt{-x}^2\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\sqrt{-x}^2\right)^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left(\sqrt{-x}^2\right)^n}{(2n)!}$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left(\sqrt{-x}\right)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\sqrt{-x}\right)^{2n}$

$$\text{Ainsi} \quad \forall\, x \in]-\infty\,,\,0[,\ \boxed{g(x) = \cos\left(\sqrt{-x}\right)}$$