le 19 Janvier 2009

UTBM MT26

Médian automne 2008

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est **une feuille A4 recto-verso rédigée à la main**

Chaque partie doit être rédigée sur une feuille différente

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

PREMIERE PARTIE.

Exercice 1 *(Applications directes du cours) - 6 points*

1) Déterminer la véracité de l'implication suivante dans les deux cas ci-dessous :

$$\sum_{n\geq 0} u_n \text{ converge} \Longrightarrow \sum_{n\geq 0} u_n^2 \text{ converge.}$$

Justifier la réponse.

cas 1 *:* $\forall n \geq 0, u_n \geq 0.$

cas 2 : u_n *de signe quelconque.*

2) L'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x.\sqrt{x-1}} dx$ *est-elle convergente ?*

3) Soit $u_n = \frac{1}{n!}$.

a - Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ *est convergente.*

b - Montrer qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall N \geq N_1, |\sum_{n\geq N+1} u_n| \leq \frac{1}{2^N}$.

c - En déduire $N_2 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\sum_{n=1}^{n=N_2} \frac{1}{n!}$ *soit une approximation a* 10^{-3} *prés de* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!}$.

Exercice 2 *- 6 points*

1) Etudier la convergence des séries suivantes :

$$S_1 = \sum (1 + \frac{a}{n})^{-n^2} \ (a > 0) \qquad S_2 = \sum \frac{n^n}{n!}$$

2) Etudier la convergence simple et absolue de la série suivante :

$$S_3 = \sum (-1)^n.(\sqrt{n^2+1} - n).$$

3) Grâce aux développements limités, étudier la convergence de la série suivante :

$$S_4 = \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.\cos(\frac{1}{n}).$$

TOURNER LA PAGE SVP

DEUXIEME PARTIE : NOUVELLE FEUILLE.

Exercice 3 - *5 points*

Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *continue telle que* $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ *converge.*

1. *Montrer que* $f(x) = \sin(e^x)$ *vérifie "*$\int_0^{+\infty} f(t)dt$ *converge" et n'admet pas de limite en* $+\infty$.

2. *Si* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$, *que peut-on dire de* l *? Justifier la réponse.*

3. *Si* f *est décroissante, montrer que* $0 \leq x.f(x) \leq 2\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)dt \geq 0$.
   En déduire que $\lim_{x\to+\infty} x.f(x) = 0$.

Exercice 4 - *5 points*

I - Une suite de fonctions :
Etudier la convergence simple et uniforme de la **suite** *de fonctions* $f_n(x) = \frac{n}{n+x}$.

II - Une série de fonctions :
1) Montrer que la série $g(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{e^{-nx}}{n}$ *converge simplement et uniformément sur* $[1, +\infty[$.

2) Peut-on déterminer explicitement la dérivée de g ? Justifier.

3) En déduire g(x) sachant que $\lim_{x\longrightarrow+\infty} g(x) = 0$.

RAPPEL :

$$\ln(1+X) \sim_{X\to 0} X - \frac{X^2}{2} + o(X^2).$$

$$\cos(X) \sim_{X\to 0} 1 - \frac{X^2}{2} + o(X^3).$$

$$\forall k \in]-1, 1[, \sum_{n=N}^{+\infty} k^n = \frac{k^N}{1-k}.$$