Médian MT26, Automne 2013

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation de la copie.
Le barême, donné à titre indicatif, est susceptible de modification.
Une feuille de notes A4 recto-verso est autorisée pour l'épreuve. Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 : Intégrales généralisées (6 points)

1. Calculer $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

2. Donner la nature des intégrales suivantes :

a. $I = \int_1^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^3\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

b. $J = \int_0^1 \frac{\ln x}{(1+x)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

c. $K = \int_0^1 \cos\left(\frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x$

d. $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-\mathrm{e}^{\cos x}}\,\mathrm{d}x$

3. Discuter, en fonction du nombre réel α, la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2 : Séries (7 points)

1. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{9}\right)^n$.

2. **a.** Chercher trois réels a, b, et c tels que pour tout entier $n \geqslant 3$, on ait :

$$\frac{n^3}{n!} = \frac{a}{(n-1)!} + \frac{b}{(n-2)!} + \frac{c}{(n-3)!}$$

b. En déduire la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{n!}$.

3. Donner la nature de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{(2n+1)!}$.

4. Discuter, en fonction du nombre réel α, la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sin\frac{1}{n}\right)^\alpha$.

5. On peut montrer que la série $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n.n}$ converge vers $\ln\left(\frac{4}{3}\right)$. En utilisant le critère des séries alternées, en déduire une valeur approchée de $\ln\left(\frac{4}{3}\right)$ à $\frac{1}{20}$ près.

Exercice 3 : Comparaison somme intégrale (7 points)

On note f la fonction définie, pour tout réel x strictement positif, par : $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$.

1. **a.** Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, montrer que l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} f(x)\,dx$ est convergente et exprimer I_n en fonction de n.

b. En déduire que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

2. Montrer que la série de terme général $u_n = f(n)$ est convergente.

3. **a.** Établir que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad f(k+1) \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant f(k)$.

b. En sommant soigneusement cette dernière inégalité, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant I_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k + \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$$

c. Déduire des questions précédentes un équivalent simple, lorsque n est au voisinage de $+\infty$, de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{k}}}{k^2}$.