SUITES ET SÉRIES - MT26
TRONC COMMUN
MÉDIAN - AUTOMNE 2014

L'usage de la calculatrice est interdit. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Exercice 1 (Intégrales généralisées)**.**

1. Calculer $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$.
2. Donner la nature des intégrales suivantes :
   (a) $I = \displaystyle\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$
   (b) $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
   (c) $K = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-1)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
   (d) Rappeler (sans démonstration) le développement limité en 0 à l'ordre 2 de la fonction $u \mapsto \ln(1+u)$.
   En déduire la nature de $L = \displaystyle\int_0^{+\infty} 1 + t\ln\left(\frac{t}{t+1}\right)\mathrm{d}t$
3. Discuter, en fonction du nombre réel α, la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t^\alpha}\mathrm{d}t$.

Exercice 2 (Séries)**.**

1. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$.
2. Donner la nature des séries de terme général :
   (a) $u_n = \dfrac{1}{n!}$
   (b) $v_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{n}}$
   (c) $w_n = (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$
3. (a) Rappeler le développement limité en 0 à l'ordre 2 de la fonction exponentielle.
   (b) Soient a et b deux nombres réels. Discuter, en fonction de a et de b, la convergence de la série de terme général $u_n = \exp\left(\dfrac{1}{n}\right) - a - \dfrac{b}{n}$.

Exercice 3 (Comparaison somme intégrale).
Soit n un entier naturel non nul, on définit

$$f : \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\exp\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x^2} \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad I_n = \int_n^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

1. (a) Pour tout entier naturel n non nul, montrer que l'intégrale I_n est convergente et exprimer I_n en fonction de n.

   (b) En déduire que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

2. Montrer que la série de terme général $u_n = f(n)$ est convergente.

3. (a) Établir que : $\quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad f(k+1) \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(k).$

   (b) En sommant soigneusement cette dernière inégalité, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant I_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k + \frac{\exp\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2}$$

   (c) Déduire des questions précédentes un équivalent simple, lorsque n est au voisinage de $+\infty$, de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\exp\left(\frac{1}{k}\right)}{k^2}$.