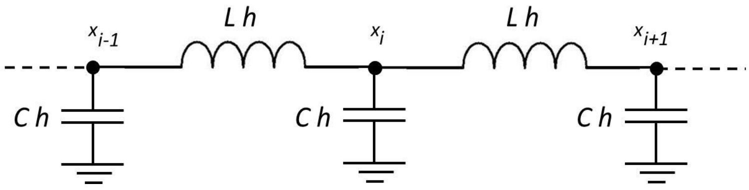
Examen du 30 juin 2011: 8h00-10h00



On considère une ligne électrique constituée d'une répétition de cellules (x_i, x_{i+1}) de longueur h comprenant chacune une inductance $L\ h$ et une capacité $C\ h$ comme sur le schéma où L et C sont deux constantes positives. Les inductances sont reliées entre elles en série et chaque capacité est placée entre un noeud x_i du circuit et la masse. On note $V_h(x,t)$ et $I_h(x,t)$ la tension et l'intensité considérées comme des fonctions de la variable d'espace x de l'axe parallèle à la ligne de circuit et de t la variable de temps. Dans une section (x_i, x_{i+1}) la tension d'entrée est $V_h(x_i,t)$ et la tension de sortie est $V_h(x_{i+1},t)$. Les courants entrants et sortants au noeud x_i sont $I_h(x_i,t)$ et $I_h(x_{i+1},t)$. La chute de tension $V_L = V_h(x_i,t) - V_h(x_{i+1},t)$ dans l'inductance est proportionnelle à la dérivée temporelle du courant, $V_L = Lh\dfrac{\partial I_h(x_i,t)}{\partial t}$ et le courant I_C circulant à travers la capacité relié en x_i est proportionnel à la dérivée temporelle de la tension $I_C = Ch\dfrac{\partial V_h(x_i,t)}{\partial t}$. Enfin, la loi de Kirchhoff des courants au noeud x_i s'écrit $I_h(x_i,t) - I_C - I_h(x_{i+1},t) = 0$.

1.a. Etablir les deux équations vérifiées par les limites $V(x,t)$ et $I(x,t)$ de $V_h(x,t)$ et $I_h(x,t)$ obtenues lorsque la taille h des cellules tend vers zéro,

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = -L\frac{\partial I(x,t)}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial I(x,t)}{\partial x} = -C\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}.$$

1.b. En déduire l'équation, dite des télégraphistes, vérifiée par la tension $V(x,t)$,

$$LC\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} = 0. \tag{1}$$

Dans la suite, on pose $LC = 1$, on considère que l'équation des télégraphistes est posée dans les intervalles $x \in (0,1)$ et $t \in (0,1)$ avec conditions aux limites sur la tension

$$V(0,t) = V(1,t) = 0. \tag{2}$$

On adjoint également les conditions initiales

$$V(x,0) = V_0(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial V(x,0)}{\partial t} = V_1(x) \tag{3}$$

où V_0 et V_1 sont deux fonctions données définies sur $(0,1)$.

2. Quel est le type de l'équation des télégraphistes (bien justifier votre réponse)?

On utilise la méthode des variables séparées en posant $V(x,t) = u(x)w(t)$ pour déterminer la solution générale de l'équation des télégraphistes munie des conditions aux limites (on ne tient pas compte des conditions initiales).

3.a. Montrer que u et w sont solutions des équations

$$\frac{d^2w}{dt^2}(t) = -k^2w(t) \text{ pour } t \in (0,1) \text{ et } \frac{d^2u}{dx^2}(x) = -k^2u(x) \text{ pour } x \in (0,1)$$

pour n'importe quel nombre k.

3.b. Calculer toutes les solutions possibles u en tenant compte des conditions aux limites.

3.c. En déduire la solution générale w et finalement toutes les solutions V de (1-2).

On considère la formulation variationnelle

$$V(t,.) \in \mathcal{V}, \int_0^1 \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} w(x) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x}\frac{\partial w(x)}{\partial x}\, dx = 0 \text{ pour chaque } t \in (0,1)$$
$$\text{pour tout } w \in \mathcal{V} = \{v \in H^1(0,1) \mid v(0) = v(1) = 0\}.$$

4. Montrer que le problème aux limites (1-2) implique la formulation variationnelle.

Il s'agit de procéder à la discrétisation spatiale (on ne discrétise pas la variable de temps) par la méthode des éléments finis de la formulation variationnelle. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on effectue la discrétisation aux noeuds $x_0, ..., x_{N+1}$ avec $x_i = i\ \Delta x$ et $\Delta x = \dfrac{1}{N+1}$. On utilise la famille $(\varphi_i)_{i=0,...,N+1}$ des fonctions "chapeau" définies en cours comme base d'approximation. On admet que

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \begin{pmatrix} \varphi_i(x)\varphi_i(x) & \varphi_i(x)\varphi_{i+1}(x) \\ \varphi_{i+1}(x)\varphi_i(x) & \varphi_{i+1}(x)\varphi_{i+1}(x) \end{pmatrix} dx = \frac{\Delta x}{6}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\text{et } \int_{x_i}^{x_{i+1}} \begin{pmatrix} \varphi_i'(x)\varphi_i'(x) & \varphi_i'(x)\varphi_{i+1}'(x) \\ \varphi_{i+1}'(x)\varphi_i'(x) & \varphi_{i+1}'(x)\varphi_{i+1}'(x) \end{pmatrix} dx = \frac{1}{\Delta x}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Appliquer la méthode de Galerkin et pour cela montrer qu'il faut faire le choix $V(x,t) = \sum_{i=1}^N V_i(t)\varphi_i(x)$.

6. Ecrire la première équation du système discrétisé par la méthode des éléments finis, elle porte sur $\dfrac{\partial^2 V_1}{\partial t^2}$, $\dfrac{\partial^2 V_2}{\partial t^2}$, V_1 et V_2.

Dans la suite, on procède à une discrétisation par la méthode des différences finies. Pour cela, on choisit de l'effectuer sur le système des équations satisfaites par le couple (I,V),

$$\frac{\partial I(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = 0 \text{ et } \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial I(x,t)}{\partial x} = 0 \text{ pour } x \in (0,1) \text{ et } t \in (0,1).$$

On l'écrit sous la forme d'un système

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} + A\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} = 0 \text{ où } U = \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et on propose d'appliquer le schéma de Lax-Friedrichs avec les pas de temps et pas d'espace Δt et Δx et avec la notation U_j^n pour l'approximation de $U(n\Delta x, j\Delta t)$:

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2}(U_{j+1}^n + U_{j-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}A(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n).$$

7. a. Montrer que $\dfrac{U(x_j,t_{n+1}) - \frac{1}{2}(U(x_{j+1},t_n) + U(x_{j-1},t_n))}{\Delta t}$ est une approximation consistante de $\dfrac{\partial U(x_j,t_n)}{\partial t}$. Donner l'ordre de consistance.

b. En déduire que le schéma est consistant à condition que le rappport $\dfrac{\Delta x^2}{\Delta t}$ tende vers 0 lorsque Δt et Δx tendent vers 0.