Examen du 28 juin 2011: 8h00-10h00

Exercice 1: On considère la distribution $u(x) \in \mathcal{C}^2(0,L)$ de la température à l'équilibre dans un barreau de longueur L soumis à une source de chaleur distribuée $f \in \mathcal{C}^0(0,L)$. Les variations de u sont gouvernées par l'équation

$$-(a_\varepsilon u')' = f$$

dans le barreau. On suppose que le coefficient de diffusion est périodique de période $\varepsilon > 0$, autrement dit $a_\varepsilon(x) = a^0(x/\varepsilon)$ où $a^0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ est une fonction 1-périodique sur $\mathbb{R}$, en particulier $a(0) = a(1)$. On suppose que les extrémités du barreau sont maintenues à température nulle.

1. Ecrire le problème aux limites complet.

Sous l'hypothèse $(Tf)(x,y) = f^0(x,y) + O(\varepsilon)$, dans le cours on a approché la transformation à deux échelles Tu de u par

$$(Tu)(x,y) = u^0(x,y) + \varepsilon u^1(x,y) + \varepsilon O_f(\varepsilon).$$

Ici, on introduit

$$z = u^1 - y\frac{\partial u^0}{\partial x},$$

(noté $\overline{u}^1$ en cours), sa fonction partielle $z_x : y \mapsto z(x,y)$ paramétrée par les valeurs de x et les espaces de fonctions admissibles

$$\mathcal{V}^D = \{v \in H^1(0,L) \text{ tel que } v(0) = v(L) = 0\} \text{ et } \mathcal{V}_{per} = \{v \in H^1(0,1) \text{ tel que } v(0) = v(1)\}.$$

Sous certaines hypothèses énoncées en cours et que l'on ne rappelle pas ici, u^0 est indépendant de y et le couple (u^0, z) est solution de la *formulation variationnelle à deux échelles:* $u^0 \in \mathcal{V}^D$ et $z_x \in \mathcal{V}_{per}$,

$$\int_0^L \int_0^1 a^0(y)(u^{0\prime}(x) + \frac{\partial z}{\partial y}(x,y))(v^{0\prime}(x) + \frac{\partial v^1}{\partial y}(x,y))\ dxdy = \int_0^L \int_0^1 f^0(x,y)\ v^0(x)\ dxdy$$

pour tout $v^0 \in \mathcal{V}^D$ et la fonction partielle $v^1_x \in \mathcal{V}_{per}$.

2. En posant $v^0 = 0$, et $v^1(x,y) = w(y)\varphi(x)$ avec $\varphi \in \mathcal{C}^1_0(\Omega)$ et $w \in \mathcal{V}_{per}$, établir la formulation variationnelle vérifiée pour chaque valeur de x : $z_x(y) \in \mathcal{V}_{per}$,

$$\int_0^1 a^0(y) z_x'(y) w'(y)\ dy = -u^{0\prime}(x) \int_0^1 a^0(y) w'(y)\ dy, \tag{1}$$

pour tout $w \in \mathcal{V}_{per}$. On pensera à utiliser le principe fondamental des formulations variationnelles.

On considère la solution $\theta(y) \in \mathcal{V}_{per}$ de la formulation variationnelle

$$\int_0^1 a^0(y)\theta'(y)w'(y)\ dy = -\int_0^1 a^0(y)w'(y)\ dy \text{ pour tout } w \in \mathcal{V}_{per}. \tag{2}$$

3. Montrer que $z(x,y) = -\theta(y)u^{0\prime}(x)$ est solution de la formulation variationnelle (1).

4. Montrer que si θ est solution de la formulation variationnelle (2) alors elle est solution du problème aux limites (on ne demande pas de démontrer la réciproque):

$$-(a^0(y)\theta'(y))' = a^{0\prime}(y) \text{ pour } y \in (0,1), \tag{3}$$
$$\theta(0) = \theta(1) \text{ et } \theta'(0) = \theta'(1). \tag{4}$$

Dans la suite, on construit une méthode de différences finies pour le calcul numérique de θ. En préalable, on considère que les valeurs de $y \in [0,1)$ paramétrisent les points $M(y) = (\cos 2\pi y, \sin 2\pi y)$ du cercle unité. On suppose qu'il existe une fonction intermédiaire $\widehat{\theta} \in \mathcal{C}^1$ définie dans le plan telle que $\theta(y) = \widehat{\theta}(M(y))$. Du point de vue de la fonction θ, il n'y a pas lieu de distinguer les points $y = 0$ et $y = 1$ car ils correspondent au même point sur le cercle $M(0) = M(1)$. De plus, les conditions $\theta(0) = \theta(1)$ et $\theta'(0) = \theta'(1)$ sont automatiquement satisfaites dés lors que $\widehat{\theta}$ est assez régulière sur le cercle, ce que l'on supposera. Ainsi, le problème aux limites (3, 4) se réduit, après développement, à

$$-a^0(y)\theta''(y) - a^{0\prime}(y)\theta'(y) = a^{0\prime}(y) \text{ pour } y \in [0,1).$$

5. Présenter sur un schéma la subdivision du cercle en N arcs et en indiquant leurs extrémités $M_1 = M(y_1), .., M_N = M(y_N)$ images des valeurs $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{1}{N}, ..., y_N = \frac{N-1}{N}$ dans le segment. Proposer un schéma de différences finies pour cette équation. Pour cela, on décrira les approximations choisies pour θ'' et θ', puis le système d'équations qui en résulte.

6. Montrer que le schéma proposé est consistant.

Pour finir, on établit une méthode d'éléments finis pour la formulation variationnelle (2).

7. Proposer une famille $(\varphi_k)_k$ de fonctions de base permettant d'approcher θ par une fonction affine par morceau qui vérifie les conditions aux limites de périodicité incluses dans $\mathcal{V}_{per}$.

Exercice 2: Des problèmes aux limites avec conditions aux limites de périodicité du type de celui rencontré à l'exercice 1 peuvent être également rencontré dans des domaines bi-dimensionnels. On considère la solution $u(x,y)$ d'un problème dit d'*ondes de Bloch* rencontré pour la modélisation de la propagation d'ondes dans un milieu périodique[1] bi-dimensionnel,

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = \lambda u \text{ dans } \Omega = (0,1)\times(0,1)$$
$$u(0,y) = u(1,y),\ u(x,0) = u(x,1) \text{ pour } x,\ y \in (0,1),$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,y),\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,1) \text{ pour } x,\ y \in (0,1).$$

Dans ce problème, il y a deux inconnues u et $\lambda \in \mathbb{R}$, de façon analogue à un problème de valeurs propres. On admet que $\lambda \geq 0$.

1. Calculer, par la méthode de séparation de variables, l'ensemble des solutions (u,λ) de ce problème. **Indication:** On posera $\lambda = \lambda_x^2 + \lambda_y^2$ et on fournira les solutions u associées à chaque λ possible.

2. Trouver toutes les solutions associées à $\lambda = 2\pi$.

[1] Ici les coefficients sont constants pour simplifier.